

$$E=mc^2$$

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Розв'язання задач

Ю. І. ДЖЕЖЕРЯ, С. П. КРУЧИНІН,
С. О. РЕШЕТНЯК, О. С. КЛИМУК

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Розв'язання задач



Ю. І. ДЖЕЖЕРЯ
С. П. КРУЧИНІН
С. О. РЕШЕТНЯК
О. С. КЛИМУК

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Розв'язання задач



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

ТЕОРІЯ ПОЛЯ
Розв'язання задач

Навчальний посібник

Київ 2014

УДК 537.8(0.75.8)
ББК В 313 я 7
Т 338

Автори: *Ю. І. Джежеря, С. П. Кручинін, С. О. Решетняк,
О. С. Климук*

Рецензенти:

В. О. Голуб — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний авіаційний університет);

В. Ф. Клепиков — чл.-кор. НАН України, проф.
(Інститут електрофізики та радіаційних технологій);

А. Прикарпатський — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Дрогобицький державний університет імені Івана Франка)

*Затверджено методично-редакційною радою Національного
авіаційного університету (протокол № 6/14 від 16.10.2014)*

Теорія поля. Розв'язання задач: навч. посіб. / Ю. І. Джежеря,
Т 338 С. П. Кручинін, С. О. Решетняк О. С. Климук. — К. : НАУ, 2014. —
140 с.

ISBN 979-966-598-913-4

Укладено з метою полегшення засвоєння студентами практичної частини курсу «Теорія поля». Подано стислі теоретичні відомості з курсу та задачі для самостійного розв'язання.

Для студентів напряму підготовки 6.040204 «Прикладна фізика».

ISBN 979-966-598-913-4

© Ю. І. Джежеря, С. П. Кручинін,
С. О. Решетняк, О. С. Климук, 2014
© НАУ, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ВСТУП	5
Розділ 1. ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ	7
1.1. Векторна і тензорна алгебра.	
Перетворення векторів і тензорів	7
1.2. Векторний аналіз	17
Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ	
ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ	24
2.1. Перетворення Лоренца.....	24
2.2. Чотиривимірні вектори та тензори	39
2.3. Релятивістська електродинаміка	45
Розділ 3. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА	51
3.1. Енергія та імпульс	51
3.2. Рух заряджених частинок в електромагнітному полі.....	61
Розділ 4. ПОСТІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНЕ	
І МАГНІТНЕ ПОЛЯ У ВАКУУМІ.....	71
4.1. Постійне електричне поле у вакуумі	71
4.2. Постійне магнітне поле.....	83
Розділ 5. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ	94
5.1. Хвильове рівняння та його прості розв'язки	94
Розділ 6. ПОЛЕ РУХОМИХ ЗАРЯДІВ	109
6.1. Потенціали Льснара–Віхерта... ..	109
Розділ 7. ВИПРОМІНЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ	
ХВИЛЬ	122
7.1. Дипольне, квадрупольне випромінювання	122
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	137



ПЕРЕДМОВА

«Теорія поля» є важливим курсом з циклу дисциплін теоретичної фізики, який вивчається на фізичних та фізико-математичних факультетах вищих навчальних закладів. Тому важливим завданням для викладачів є не тільки надати студентам інформаційні дані з дисципліни, але й допомогти в засвоєнні матеріалу на новому якісному рівні, підкреслюючи особливості загальних підходів до постановки та розв'язання задач циклу дисциплін теоретичної фізики. Одним з видів аудиторних занять з теорії поля є практичні заняття, на яких студенти мають можливість закріпити знання теоретичного матеріалу та розвинути навички розв'язання задач.

Пропонований навчальний посібник містить стислі теоретичні дані з основних розділів теорії поля та електродинаміки, приклади розв'язання задач та задачі для самостійного розв'язання.

Навчальний посібник розроблено для студентів кафедри теоретичної та прикладної фізики за спеціальністю «Прикладна фізика» і відповідає програмі теоретичного курсу «Теорія поля» та «Електродинаміка» фізичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Може бути корисним для студентів інших спеціальностей, зокрема, тих, для яких фізика є однією з базових дисциплін.



ВСТУП

Активний характер впливу науки на виробництво і суспільство вимагає, щоб сучасний студент — випускник вищого навчального закладу — був усебічно розвинутою творчо мислячою і соціально активною людиною. Він повинен бути здатним до науково-технічної творчості, уміти використовувати в практичній діяльності досягнення науки, брати участь у науково-дослідній роботі, керуватися засадами наукової організації праці й управління. Підготовка такого фахівця у вищій школі має проводитися на основі розвитку творчих форм навчального процесу під час навчання як спеціальних, так і загальноосвітніх дисциплін.

Фізика займає чільне місце в ряду фундаментальних дисциплін поряд з математикою, хімією та ін. Разом з фундаментальністю освіти для спеціаліста важливе значення має вміння ефективно використовувати результати фізичних досліджень для прискорення науково-технічного прогресу. Ця дисципліна належить до циклу дисциплін «Теоретична фізика» і базується на знаннях з фізики та математики за програмою середньої школи, курсах «Математичний аналіз», «Аналітична геометрія», «Електрика та магнетизм», «Класична механіка» та ін. Знання, добуті студентами з курсу «Електродинаміка», використовуються в курсах «Квантова механіка», «Теорія твердого тіла» та ін. У процесі вивчення курсу «Теорія поля» студенти повинні: 1) опанувати основні принципи і закони розділів фізики та їх математичне вираження, ознайомитися з основними фізичними явищами, методами їх спостереження й експериментального дослідження; навчитися правильно відтворювати фізичні ідеї, кількісно формулювати і розв'язувати фізичні задачі, оцінювати порядок фізичних величин; чітко уявляти межі застосування фізичних моделей і теорії; 2) оволодіти розумінням філософських і методологічних проблем сучасної науки; 3) правильно уявляти роль кожного розділу фізики в науково-технічному прогресі і розвинути вміння та інтерес до вирішення науково-технічних і прикладних завдань. Поряд з освоєнням курсу студенти фізикоматематичних факультетів вивчають такі теоретичні загальноінженерні предмети, як «Теоретична механіка», «Теоретичні основи електротехніки», «Обчислювальна техніка» та ін. Тому в курсах «Електродинаміка» та «Теорія поля» особлива увага приділяється фізичним законам, а також зв'язку фізичних понять з дослідними

даними та певними методами вимірювань. Під час викладання курсу «Теорія поля» робиться акцент на двох нерозривно пов'язаних аспектах: відображенні фізичної суті явищ і розгляді аналітичних співвідношень, які описують ці явища.

З огляду на різноманітність досліджуваних фізикою форм матерії і руху під час викладання курсу певною мірою враховується технічний профіль факультету. Водночас в умовах стрімкого науково-технічного прогресу основна роль відводиться теоретичному науково-технічному рівню фахівця, який дозволив би йому успішно орієнтуватися в найновітніших галузях науки й техніки. Засвоївши курс «Теорія поля», студенти фізико-математичного факультету повинні з повним розумінням знати фундаментальні закони цього розділу фізики і методи їх досліджень, уміти застосовувати ці знання як під час розгляду окремих явищ, поєднуючи їх фізичну суть з аналітичними співвідношеннями, так і в процесі вивчення інших дисциплін — як загальноінженерних, так і за фахом.

Відзначимо, що під час укладання цього навчального посібника, за основу були взяті класичні джерела [1, 2], відповідно до яких викладено основні теоретичні відомості, а типові методи розв'язання задач ґрунтуються на матеріалах, викладених у джерелах [3, 4].



Розділ 1

ВЕКТОРНИЙ І ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

1.1. Векторна і тензорна алгебра. Перетворення векторів і тензорів

Скаляром (інваріантом) у тривимірному просторі називається величина, що не змінює свого значення при поворотах (інверсії) координатної системи.

Вектором у тривимірному просторі називається сукупність трьох величин, що перетворюються при поворотах системи координат за формулами:

$$A'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} A_\beta, \quad (1.1)$$

або відповідно до правил тензорного аналізу:

$$A'_\alpha = a_{\alpha\beta} A_\beta,$$

де A'_α — на осі інверсної системи координат; $a_{\alpha\beta}$ — коефіцієнти перетворення, що являють собою косинуси кутів між β -ю віссю вихідної та α -ю віссю інверсної систем координат; A_β — проекції вектора на осі вихідної системи.

Вектори можуть бути записані в контраваріантних (A^α) чи коваріантних (A_α) координатах. Квадратом тривимірного вектора є величина

$$\sum_{\alpha=1}^3 A^\alpha A_\alpha = A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Скалярний добуток двох векторів визначається як

$$A^\alpha B_\alpha = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3.$$

Тензором другого рангу в тривимірному просторі називається дев'ятикомпонентна величина $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), що перетворюється при поворотах координатної системи в такий спосіб:

$$T'_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\lambda} \alpha_{\beta\mu} T_{\lambda\mu}$$

(сума за λ, μ).

Аналогічно *тензор третього рангу* в просторі трьох вимірів визначається законом перетворення:

$$T'_{\alpha\beta\gamma} = \alpha_{\alpha\lambda} \alpha_{\beta\mu} \alpha_{\gamma\nu} T_{\lambda\mu\nu}.$$

Тензори вищого рангу визначаються аналогічно.

Векторні величини при інверсії системи координат можуть перетворюватись двома способами. Ті вектори, компоненти яких при інверсії координат змінюють знак (перетворення $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$), називаються *полярними* векторами, або просто векторами. Вектори, компоненти яких не змінюють знака при інверсії системи координат, називаються *псевдовекторами*, або *аксіальними* векторами. (Різниця між коваріантними та контраваріантними компонентами векторів і тензорів несуттєва для задач, поданих у цьому розділі).

Прикладом аксіального вектора може бути векторний добуток двох полярних векторів. Аналогічно тензор s -го рангу називається просто *тензором*, якщо його компоненти перетворюються при інверсії як добуток s координат, тобто домножуються на $(-1)^s$, і *псевдотензором*, якщо його компоненти домножуються на $(-1)^{s+1}$.

Таблиця коефіцієнтів перетворення

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею перетворення*. Визначник, елементи якого збігаються з елементами деякої матриці, називається *визначником* цієї матриці:

$$\det \hat{\alpha} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Сумою двох матриць $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ називається така матриця $\hat{\gamma}$, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць — доданків:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \beta_{\alpha\beta}.$$

Добутком двох матриць $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ називається така матриця $\hat{\gamma}$, елементи якої утворюються з елементів матриць $\alpha_{\alpha\beta}$ і $\beta_{\alpha\beta}$, що перемножуються, за правилом:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\gamma}\beta_{\gamma\beta}.$$

Матриця $\hat{\gamma}$ описує таке перетворення, що виконується за послідовного перетворення спочатку матриці $\hat{\beta}$, а потім матриці $\hat{\alpha}$.

Одиничною матрицею називається матриця типу:

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вона описує тотожне перетворення ($A'_\alpha = A_\alpha$). Елементи одиничної матриці позначаються символом $\delta_{\alpha\beta}$:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha = \beta; \\ 0, & \text{якщо } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Матриця типу

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

називається *діагональною матрицею*.

Якщо елементи матриці задовольняють умову

$$\alpha_{\alpha\beta}\alpha_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma},$$

то вона називається *ортогональною*.

Матриця $\hat{\alpha}^{-1}$, що задовольняє умови

$$\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha} = \hat{1},$$

називається *оберненою* до матриці $\hat{\alpha}$.

Вона описує обернене перетворення, тобто якщо $A'_\alpha = \alpha_{\alpha\beta}A_\beta$, то $A_\alpha = \alpha_{\alpha\beta}^{-1}A'_\beta$.

Матриця $\hat{\alpha}$, що утворюється з $\hat{\alpha}$ заміною рядків на стовпці, називається *транспонованою*:

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{\alpha\beta} = \alpha_{\beta\alpha}.$$

Матриці і тензори відповідно можуть бути симетричними та антисиметричними.

Симетричним тензором другого рангу $S_{\alpha\beta}$ називається тензор, компоненти якого залишаються незмінними при перестановці індексів i та k місцями: $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$.

Антисиметричним називається тензор $A_{\alpha\beta}$, компоненти якого при перестановці індексів змінюють знак: $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$.

Символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ являє собою *одичний тензор другого рангу*, його компоненти однакові в усіх системах координат, так само, як і тензор $e_{\alpha\beta\gamma}$ — *абсолютно антисиметричний одичний псевдотензор третього рангу*. Сукупність компонент $e_{\alpha\beta\gamma}$, має такі властивості: при перестановці будь-яких двох індексів $e_{\alpha\beta\gamma}$ змінює знак; $e_{123} = 1$. Із двадцяти семи значень $e_{\alpha\beta\gamma}$ відмінні від нуля лише шість. Інші мають хоча б два однакові індекси та внаслідок антисиметрії перетворюються в нуль ($e_{\alpha\alpha\gamma} = -e_{\alpha\alpha\gamma} = 0$). Відмінні від нуля компоненти дорівнюють

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = -e_{321} = -e_{213} = -e_{132} = 1.$$

Тензори $\delta_{\alpha\beta}$ та $e_{\alpha\beta\gamma}$ відіграють важливу роль як у векторній, так і в тензорній алгебрі.

* * *

Приклад 1.1. В усіх декартових системах координат задана сукупність трьох величин a_α ($\alpha = 1, 2, 3$) і відомо, що $a_\alpha b_\alpha = \text{inv}$ щодо поворотів і відбиттів. Довести, що якщо b_α — вектор (псевдовектор), то a_α — також вектор (псевдовектор).

Розв'язання. Оскільки b_α — компоненти вектора, то при повороті системи координат вони перетворюються за формулами (1.1): $b'_\alpha = \alpha_{\alpha\beta} b_\beta$. Підставивши b'_α у рівність $a'_\alpha b'_\alpha = \text{inv}$ та порівнюючи з $a_\alpha b_\alpha = \text{inv}$, отримаємо $a_\beta = \alpha_{\alpha\beta} a'_\alpha$, тобто a_β перетворюється при поворотах також як компоненти вектора. Оскільки інваріант при відбиттях не змінює знака, компоненти a_α та b_α або одночасно повинні змінювати знак (полярні вектори), або не змінювати його (псевдовектори).

Приклад 1.2. Побудувати матриці перетворення базисних ортів у разі переходу від декартових координат до циліндричних і оберненого перетворення.

Розв'язання. Поряд із декартовою системою координат, у якій компоненти радіуса-вектора задані як $\vec{r} = (x, y, z)$, для розв'язання задач теоретичної фізики широко використовуються сферична $\vec{r} = (R, \vartheta, \alpha)$ (рис. 1.1) і циліндрична $\vec{r} = (r, \alpha, z)$ (рис. 1.2) системи координат.

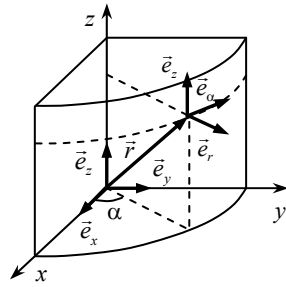


Рис. 1.1

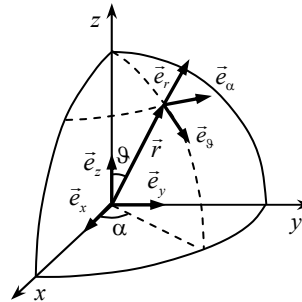


Рис. 1.2

Під час переходу від декартової до сферичної системи координат ($\vec{e}_\alpha \rightarrow \vec{e}'_\alpha$) за формулами $\vec{e}'_\alpha = \alpha_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha$ переходимо від ортів

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ до ортів $\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z$, а коефіцієнти $\alpha_{\alpha\beta}$ мають зміст проєкцій нових ортів на старі:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_{rx} & \alpha_{ry} & \alpha_{rz} \\ \alpha_{\alpha x} & \alpha_{\alpha y} & \alpha_{\alpha z} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

Наприклад, α_{rx} — коефіцієнт, який отримуємо проєктуванням \vec{e}_r на \vec{e}_x : кут між цими ортами α , тому щоб спроектувати \vec{e}_r на \vec{e}_x , потрібно \vec{e}_r домножити на $\cos\alpha$. Відповідно $\alpha_{rx} = \cos\alpha$.

Знаходячи таким чином проєкції одних ортів на інші, отримаємо матрицю перетворення від декартових координат до циліндричних:

$$\alpha_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічним чином, проєктуючи вже старі орти на нові, отримаємо матрицю оберненого перетворення:

$$\alpha_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Нехай \vec{n} одиничний вектор, усі напрямки якого в просторі рівноймовірні. Знайти середні значення його компонент та їх добутків: $\overline{n_\alpha}$, $\overline{n_\alpha n_\beta}$, $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma}$, $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$.

Розв'язання. Середні значення дорівнюють інтегралам:

$$\overline{n_\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int n_\alpha d\Omega, \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{4\pi} \int n_\alpha n_\beta d\Omega.$$

Проте замість безпосереднього обчислення інтегралів у цій задачі зручніше застосувати метод, який використовує транс-

формаційні властивості аналізованих величин. Очевидно, що величини $\overline{n_\alpha}$, $\overline{n_\alpha n_\beta}$ і т. д. є тензорами відповідно першого, другого і т. д. рангів. Утім із їх визначення випливає, що ці величини мають бути однаковими в будь-якій системі відліку. Тому вони будуть виражатися через такі тензори, компоненти яких не залежать від вибору системи відліку.

Розглянемо з цього погляду $\overline{n_\alpha}$. Оскільки немає вектора, крім нульового, компоненти якого не залежали б від системи відліку, то $\overline{n_\alpha} = 0$.

Тензор $\overline{n_\alpha n_\beta}$ повинен виражатися через симетричний тензор другого рангу, компоненти якого однакові в усіх системах відліку. Таким тензором є тільки $\delta_{\alpha\beta}$. Тому можна записати

$\overline{n_\alpha n_\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta}$. Для визначення λ тензор треба згорнути за двома значками $\overline{n_\alpha n_\alpha} = n^2 = 1 = 3\lambda$, $\lambda = 1/3$. Аналогічно знаходимо

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = 1/15 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}).$$

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. Два напрямки \vec{n} і \vec{n}' визначаються у сферичній системі координат кутами ϑ , α і ϑ' , α' . Знайти косинус кута між ними.

Відповідь. $\cos \vartheta = n n' = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\alpha - \alpha')$.

1.2. Довести тотожності:

а) $[\vec{A} \times \vec{B}] \cdot [\vec{C} \times \vec{D}] = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$;

б) $[\vec{A} \times \vec{B}] \times [\vec{C} \times \vec{D}] = (\vec{A} \cdot [\vec{B} \times \vec{D}])\vec{C} - (\vec{A} \cdot [\vec{B} \times \vec{C}])\vec{D} =$
 $= (\vec{A} \cdot [\vec{C} \times \vec{D}])\vec{B} - (\vec{B} \cdot [\vec{C} \times \vec{D}])\vec{A}$.

1.3. Довести, що коли $a_\alpha = T_{\alpha\beta} b_\beta$ у будь-якій системі координат і $T_{\alpha\beta}$ — тензор другого рангу, а b_β — вектор, то a_α — також вектор.

1.4. Довести, що $\partial a_\alpha / \partial x_\beta$ є тензором другого рангу.

1.5. Довести, що коли $T_{\alpha\beta}$ — тензор другого рангу і $P_{\alpha\beta}$ — псевдотензор другого рангу, то $T_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}$ — псевдоскаляр.

1.6. Показати, що коли тензор $S_{\alpha\beta}$ — симетричний, а тензор $A_{\alpha\beta}$ — антисиметричний, то $A_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} = 0$.

1.7. Довести, що сума діагональних компонент тензора другого рангу є інваріантом.

1.8. Знайти компоненти тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$, оберненого до тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Розглянути, зокрема, випадок, коли $\varepsilon_{\alpha\beta}$ є симетричним тензором, заданим у головних осях.

Відповідь. Тензор, обернений заданому, задовольняє співвідношення

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma}^{-1} = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (1.2)$$

Це — алгебричне рівняння щодо компонент $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ оберненого тензора. Їх розв'язок має вигляд

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{\Delta_{\beta\alpha}}{|\varepsilon|}, \quad (1.3)$$

де $\Delta_{\beta\alpha}$ — алгебричне доповнення елемента $\varepsilon_{\alpha\beta}$ у визначнику $|\varepsilon|$.

Із формули (1.3) випливає, що для існування оберненого тензора необхідно, щоб $|\varepsilon| \neq 0$. Ураховуючи відому властивість визначника $\Delta_{\beta\alpha} \varepsilon_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} |\varepsilon|$, переконуємося, що обернений тензор задовольняє з урахуванням виразу (1.2) також умови

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} \varepsilon_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Якщо $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — симетричний тензор, заданий в головних осях:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{(\alpha)} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{додавати по } \alpha \text{ не потрібно)}, \text{ то } \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon^{(\alpha)}} \delta_{\alpha\beta}.$$

1.9. Нехай у всіх координатних системах компоненти вектора \vec{a} лінійно виражаються через компоненти вектора \vec{b} : $a_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} b_\beta$. Довести, що сукупність величин $\varepsilon_{\alpha\beta}$ є тензором другого рангу.

1.10. Показати, що сукупність величин $A_{\alpha\beta\gamma} B_{\alpha\beta}$, де $A_{\alpha\beta\gamma}$ — тензор третього рангу, а $B_{\alpha\beta}$ — тензор другого рангу, є вектором.

1.11. Знайти закон перетворення сукупності об'ємних інтегралів $T_{\alpha\beta} = \int x_\alpha x_\beta dV$ при просторових поворотах і відбиттях (x_α і x_β — декартові координати).

Відповідь. $T_{\alpha\beta}$ утворюють тензор другого рангу.

1.12. Скласти матриці перетворення базисних ортів: при переході від декартових координат до сферичних і навпаки — від сферичних координат до декартових; при переході від декартових координат до циліндричних і навпаки — від циліндричних координат до декартових.

1.13. В усіх декартових системах координат задано сукупність величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, що мають такі властивості: при перестановці будь-яких двох індексів $e_{\alpha\beta\gamma}$ змінює знак; $e_{123} = 1$.

Показати, що ця сукупність $e_{\alpha\beta\gamma}$ утворить псевдотензор третього рангу (цілком антисиметричний одиничний псевдотензор третього рангу).

Відповідь. Із 27 величин, відмінних від нуля, тільки шість. Решта мають хоча б два однакові індекси і внаслідок антисиметрії перетворюються в нуль ($e_{\alpha\alpha\beta} = -e_{\alpha\alpha\beta} = 0$). Відмінні від нуля компоненти дорівнюють

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = -e_{321} = -e_{213} = -e_{132} = 1.$$

Складемо вираз $\alpha_{1\alpha} \alpha_{2\beta} \alpha_{3\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}$. Згадавши визначення детермінанта третього порядку і використовуючи визначення $e_{\alpha\beta\gamma}$, запишемо цей вираз у вигляді $\alpha_{1\alpha} \alpha_{2\beta} \alpha_{3\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} = |\hat{\alpha}| = +1 = e'_{\alpha\beta\gamma}$. Переставивши тепер зліва два індекси, наприклад 1 і 2, маємо

$$\alpha_{2\alpha} \alpha_{1\beta} \alpha_{3\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} = -\alpha_{1\beta} \alpha_{2\alpha} \alpha_{3\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} = -e'_{123} = e'_{213} \dots$$

Із цих рівнянь видно, що $e_{\alpha\beta\gamma}$ перетворюється при поворотах як тензор третього рангу. При відображеннях величини $e_{\alpha\beta\gamma}$ не змінюються, тому сукупність їх утворює аксіальний тензор третього рангу. Він має цінну властивість: його компоненти у всіх координатних системах однакові.

1.14. Довести, що компоненти антисиметричного тензора другого рангу при повороті координат перетворюються як компоненти вектора.

Відповідь. Запишемо тензор $A_{\alpha\beta}$ у вигляді таблиці:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо: $A_{23} = A_1$, $A_{31} = A_2$, $A_{12} = A_3$. Ці три рівняння можна записати як $A_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\gamma}$, де $e_{\alpha\beta\gamma}$ — повністю антисиметричний одиничний тензор третього рангу. Але оскільки $e_{\alpha\beta\gamma}$ є тензором третього рангу, а $A_{\beta\gamma}$ — тензором другого рангу, величини A_α ($\alpha = 1, 2, 3$) утворюють вектор; A_α називається вектором, дуальним тензору $A_{\alpha\beta}$.

1.15. Записати вирази для компонент векторного добутку двох векторів і вихору вектора за допомогою одиничного антисиметричного тензора $e_{\alpha\beta\gamma}$. Визначити, як перетворюються ці величини при поворотах і відбиттях.

Відповідь. $[\vec{A} \times \vec{B}]_\alpha = -e_{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma$, $\text{rot}_\alpha \vec{A} = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial A_\gamma}{\partial x_\beta}$, $[\vec{A} \times \vec{B}]$ та

$\text{rot } \vec{A}$ можна розглядати як антисиметричні тензори другого рангу або як дуальні їм вектори, компоненти яких не змінюють знака при відображенні (псевдовектори).

1.16. Довести рівності:

а) $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\delta\epsilon} = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\epsilon} - \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta\delta}$;

б) $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\beta\gamma\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}$.

1.17. Показати, що $T_{\alpha\beta}a_\alpha b_\beta - T_{\alpha\beta}a_\beta b_\alpha = 2\vec{\omega} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]$, де $T_{\alpha\beta}$ — довільний тензор другого рангу, \vec{a} і \vec{b} вектори, $\vec{\omega}$ — вектор, еквівалентний антисиметричній частини $T_{\alpha\beta}$.

1.18. Перетворити добуток $(\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}])(\vec{a}' \cdot [\vec{b}' \times \vec{c}'])$ на суму членів, що містять тільки скалярні добутки векторів.

Указівка. Застосувати теорему про множення визначників, або скористатися псевдотензором третього рангу $e_{\alpha\beta\gamma}$.

Відповідь.

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}')(\vec{b} \cdot \vec{b}')(\vec{c} \cdot \vec{c}') + (\vec{a} \cdot \vec{b}')(\vec{b} \cdot \vec{c}')(\vec{c} \cdot \vec{a}') + (\vec{b} \cdot \vec{a}')(\vec{c} \cdot \vec{b}')(\vec{a} \cdot \vec{c}') - (\vec{a} \cdot \vec{c}')(\vec{c} \cdot \vec{a}')(\vec{b} \cdot \vec{b}') - (\vec{a} \cdot \vec{b}')(\vec{b} \cdot \vec{a}')(\vec{c} \cdot \vec{c}') - (\vec{b} \cdot \vec{c}')(\vec{c} \cdot \vec{b}')(\vec{a} \cdot \vec{a}').$$

1.19. Знайти усереднені в усіх напрямках значення виразів:

$$\overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})^2}, \quad \overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})}, \quad \overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})\vec{n}}, \quad \overline{[\vec{a} \times \vec{n}]^2}, \quad \overline{[\vec{a} \times \vec{n}][\vec{b} \times \vec{n}]},$$

$\overline{(\vec{a} \cdot \vec{n})(\vec{b} \cdot \vec{n})(\vec{c} \cdot \vec{n})(\vec{d} \cdot \vec{n})}$, якщо \vec{n} — одиничний вектор, усі напрямки якого рівномірні, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} і \vec{d} — сталі вектори.

Указівка. Скористатися результатами задачі 1.18.

Відповідь.

$$a^2/3, \quad (\vec{a} \cdot \vec{b})/3, \quad \vec{a}/3, \quad 2/3 a^2, \quad 2/3(\vec{a} \cdot \vec{b});$$

$$1/15 [(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) + (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})].$$

1.2. Векторний аналіз

У довільній ортогональній системі координат q_1, q_2, q_3 квадрат елемента довжини виражається формулою

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2,$$

а елемент об'єму — формулою

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3,$$

де

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad —$$

функції координат (коефіцієнти Ламе).

Диференціальні операції записуються таким чином:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right];$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ h_2 h_3 & h_1 h_3 & h_1 h_2 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \varphi)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i};$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right].$$

У формулі для $\operatorname{rot} \vec{A}$ диференціальні оператори $\frac{\partial}{\partial q_i}$ діють на елементи останнього рядка визначника. У сферичній системі координат:

$$x = r \sin \vartheta \cos \alpha, \quad y = r \sin \vartheta \sin \alpha, \quad z = r \cos \vartheta;$$

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\alpha = r \sin \vartheta;$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{e}_\alpha}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha};$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\alpha) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right];$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r};$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_{\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_{\vartheta})}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta};$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.$$

У циліндричній системі координат:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z;$$

$$h_r = 1, \quad h_{\alpha} = r, \quad h_z = 1;$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_{\vartheta}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial z}; \quad (\operatorname{rot} \vec{A})_{\alpha} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r};$$

$$(\operatorname{rot} \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_{\alpha}) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha};$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

За будь-яких \vec{A} і φ виконуються тотожності:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta \varphi.$$

Наведені нижче основні інтегральні теореми пов'язують між собою об'ємні, поверхневі та контурні інтеграли.

Теорема Остроградського–Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (1.4)$$

де V — деякий об'єм; S — замкнена поверхня, що обмежує цей об'єм.

Теорема Стокса:

$$\oint_l \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad (1.5)$$

де l — замкнений контур; S — довільна поверхня, що спирається на цей контур.

У формулах (1.4) і (1.5) вектор \vec{A} має бути диференційовною функцією координат.

* * *

Приклад 1.4. Користуючись теоремою Остроградського–Гаусса, обчислити інтеграл

$$\vec{I} = \oint \vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{n}) dS,$$

якщо об'єм, який охоплює замкнена поверхня, дорівнює V ; \vec{a} — сталий вектор, \vec{n} — орт нормалі до поверхні.

Розв'язання. Тут, як і в ряді інших випадків, зручно розглянути скалярний добуток інтеграла на довільний сталий вектор \vec{c} :

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \oint \vec{r}(\vec{a} \cdot \vec{n}) dS &= \oint (\vec{c} \cdot \vec{r}) a_n dS = \int \operatorname{div}((\vec{c} \cdot \vec{r})\vec{a}) dV = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \int dV = (\vec{a} \cdot \vec{c})V. \end{aligned}$$

Оскільки \vec{c} сталий вектор, то звідси випливає, що $\vec{I} = \vec{a}V$.

Задачі для самостійного розв'язання

1.20. Обчислити $\operatorname{div} \vec{r}$, $\operatorname{rot} \vec{r}$, $\operatorname{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r})$, $\operatorname{grad} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$, $(\vec{p} \cdot \nabla)\vec{r}$, де \vec{r} — радіус-вектор; \vec{p} — сталий вектор.

1.21. Знайти дивергенції та вихори векторів $(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}$, $[\vec{a} \times \vec{r}]$, $\vec{r} \times [\vec{a} \times \vec{r}]$, де \vec{a} і \vec{b} — сталі вектори.

Відповідь.

$$\operatorname{div}(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \operatorname{rot}(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}, \operatorname{div}(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r} = 4(\vec{a} \cdot \vec{r});$$

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r} = \vec{a} \times \vec{r}, \operatorname{div}[\vec{a} \times \vec{r}]\vec{r} = 0, \operatorname{rot}[\vec{a} \times \vec{r}] = 2\vec{a};$$

$$\operatorname{div} \vec{r} \times [\vec{a} \times \vec{r}] = -2(\vec{a} \cdot \vec{r}), \operatorname{rot} \vec{r} \times [\vec{a} \times \vec{r}] = 3[\vec{r} \times \vec{a}].$$

1.22. Обчислити $\operatorname{grad} \varphi(r)$, $\operatorname{div} \varphi(r) \vec{r}$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \vec{r}$, $(\vec{p} \cdot \nabla) \varphi(r) \vec{r}$.
Функція $\varphi(r)$ залежить тільки від модуля радіуса-вектора.

Відповідь. $\operatorname{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r)$, $\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\vec{r}}{r} \varphi'$, $\operatorname{div} \varphi(r) \vec{r} = 3\varphi + r\varphi'$;
 $\operatorname{rot} \varphi(r) \vec{r} = 0$, $(\vec{p} \cdot \nabla) \varphi(r) \vec{r} = \vec{p}\varphi + \frac{\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r} \varphi'$.

1.23. Обчислити $\operatorname{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{r}$, $\operatorname{div} \varphi(r) \cdot \vec{A}(r)$, $\operatorname{rot} \varphi(r) \cdot \vec{A}(r)$,
 $(\vec{p} \cdot \nabla) \varphi(r) \vec{A}(r)$.

Відповідь. $\operatorname{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{r} = \vec{A} + \frac{\vec{r}}{r} (\vec{r} \cdot \vec{A}')$;

$$\operatorname{grad} \vec{A}(r) \cdot \vec{B}(r) = \frac{\vec{r}}{r} (\vec{A}' \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B}')$$

$$\operatorname{div} \varphi(r) \vec{A}(r) \cdot \vec{r} = \frac{\varphi'}{r} (\vec{r} \cdot \vec{A}) + \frac{\varphi}{r} (\vec{r} \cdot \vec{A}')$$

$$\operatorname{rot} \varphi(r) \vec{A}(r) \cdot \vec{r} = \frac{\varphi'}{r} [\vec{r} \times \vec{A}] + \frac{\varphi}{r} [\vec{r} \times \vec{A}']$$

$$(\vec{p} \cdot \nabla) \varphi(r) \vec{A}(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r} (\varphi' \vec{A} + \varphi \vec{A}')$$

1.24. Довести тотожності:

a) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi \vec{A}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi$;

г) $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$;

д) $\operatorname{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \cdot \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}$.

Скаляри φ , ψ і вектори \vec{A} , \vec{B} — являють собою функції радіуса-вектора \vec{r} .

1.25. Довести тотожності:

$$\text{a) } \vec{C} \cdot \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A};$$

$$\text{б) } (\vec{C} \cdot \nabla) [\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{A} \times (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B} \times (\vec{C} \cdot \nabla) \vec{A};$$

$$\text{в) } (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \text{ div } \vec{A};$$

$$\text{г) } [\vec{A} \times \vec{B}] \cdot \text{rot } \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{C} - \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{C};$$

$$\text{д) } [\vec{A} \times \nabla] \times \vec{B} = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} - \vec{A} \text{ div } \vec{B};$$

$$\text{е) } [\nabla \times \vec{A}] \times \vec{B} = \vec{A} \text{ div } \vec{B} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} - \vec{B} \times \text{rot } \vec{A}.$$

1.26. Інтеграл за об'ємом перетворити в інтеграл за поверхнею:

$$\int (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \vec{A}) dV.$$

Відповідь. $\int (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \vec{A}) dV = \oint [\vec{A} \times \text{grad } \varphi] dS = \int \varphi \text{rot } \vec{A} dS.$

1.27. Користуючись теоремою Остроградського–Гаусса, обчислити інтеграли

$$\vec{I} = \oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS, \quad \vec{I} = \oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} dS,$$

якщо об'єм, який охоплює замкнена поверхня, дорівнює V ; \vec{a} — сталий вектор; \vec{n} — орт нормалі до поверхні.

Відповідь. Тут, як і в ряді інших випадків, зручно розглянути скалярний добуток інтеграла на випадковий постійний вектор \vec{c} :

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \oint \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS &= \oint (\vec{c} \cdot \vec{r}) \vec{a}_n dS = \int \text{div} [(\vec{c} \cdot \vec{r}) \times \vec{a}] dV = \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \int dV = (\vec{a} \cdot \vec{c}) V. \end{aligned}$$

Оскільки \vec{c} — випадковий вектор, то звідси випливає, що $\int (\vec{a} \cdot \vec{n}) \vec{r} dS = \vec{a} V$. Таким же методом отримуємо $\oint (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{n} dS = \vec{a} V$.

1.28. Інтеграл за замкненою поверхнею перетворити на інтеграл за об'ємом всередині поверхні (\vec{b} — сталий вектор, \vec{n} — орт нормалі до поверхні):

$$\vec{I} = \oint \vec{n} \varphi dS, \quad \vec{I} = \oint [\vec{n} \times \vec{A}] dS, \quad \vec{I} = \oint (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{A} dS.$$

Відповідь. $\oint \vec{n} \varphi dS = \int \text{grad } \varphi dV, \quad \oint [\vec{n} \times \vec{A}] dS = \int \text{rot } \vec{A} dV,$

$$\oint (\vec{n} \cdot \vec{b}) \vec{A} dS = \int (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{A} dV.$$

1.29. Користуючись теоремою Стокса, обчислити інтеграл $\vec{I} = \oint \varphi d\vec{l}$.

Відповідь. $\oint \varphi d\vec{l} = \int [\vec{n} \times \text{grad } \varphi] dS.$

1.30. Довести тотожність

$$\int (\vec{A} \cdot \text{rot rot } \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{rot rot } \vec{A}) dV = \oint [[\vec{B} \times \text{rot } \vec{A}] - [\vec{A} \times \text{rot } \vec{B}]] \cdot d\vec{S}.$$

1.31. Показати, що $\int_V \vec{A} dV = 0$, якщо $\text{div } \vec{A} = 0$ усередині об'єму V , а $A_n = 0$ — якщо на межі об'єму.

1.32. Показати, що дивергенція вектора

$$\vec{A} + \frac{1}{4\pi} \text{grad} \int \frac{\text{div } \vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

дорівнює нулю.

1.33. Для тривимірного тензора другого рангу довести теорему Остроградського–Гаусса:

$$\int \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} dV = \oint T_{\alpha\beta} dS_\alpha.$$

Указівка. Виходити з теореми Остроградського–Гаусса для вектора $A_\alpha = T_{\alpha\beta} a_\beta$, де \vec{a} — довільний сталий вектор.

1.34. Знайти розв'язок рівняння Лапласа в сферичній системі координат для скалярної функції, яка залежить лише від однієї координати: а) від r ; б) від ϑ ; в) від α .

Відповідь. а) $A + \frac{B}{r}$; б) $A + B \ln \text{tg } \frac{\vartheta}{2}$; в) $A + B\alpha$.

1.35. Знайти розв'язок рівняння Лапласа в циліндричній системі координат для скалярної функції, яка залежить лише від однієї координати: а) від r ; б) від α ; в) від z .

Відповідь. а) $A + B \ln r$; б) $A + B\alpha$; в) $A + Bz$.

Розділ 2

ЕЛЕМЕНТИ СПЕЦІАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

2.1. Перетворення Лоренца

Координати і час у двох інерціальних системах відліку S і S' пов'язані між собою формулами *перетворень Лоренца*:

$$x = \frac{1}{\gamma}(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{1}{\gamma}(t' + Vx'/c^2), \quad (2.1)$$

де $\gamma = \sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Відповідні осі координат систем S і S' паралельні одна одній, відносна швидкість напрямлена вздовж осі Ox і при $t = t' = 0$ початки координат S і S' містяться в одній точці.

Обернені перетворення Лоренца можна отримати заміною знака швидкості V :

$$x' = \frac{1}{\gamma}(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{1}{\gamma}(t - Vx/c^2).$$

Величини $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ є координатами світної точки

$$x^i = (ct, \vec{r}).$$

Будь-які чотири величини A^0 , A^1 , A^2 , A^3 , що перетворюються при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої так само, як координати та час, тобто за формулами

$$A^0 = \frac{1}{\gamma}(A^{0'} + \beta A^{1'}), \quad A^1 = \frac{1}{\gamma}(A^{1'} + \beta A^{0'}), \quad A^2 = A^{2'}, \quad A^3 = A^{3'}, \quad (2.2)$$

($\beta = V/c$) утворюють *чотиривимірний вектор* A^i , $i = 0, 1, 2, 3$.

Тривимірний вектор $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$ називають *просторовою*, а величину A^0 — *часовою складовою* чотиривимірного вектора A^i .

Для більш зручного запису вводяться два типи компонентів чотиривимірних векторів, які позначаються таким чином: A^i та A_i . При цьому

$$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3.$$

Величини A^i називають *контраваріантними*, а A_i — *коваріантними* компонентами чотиривимірного вектора. Квадрат чотиривимірного вектора записується таким чином:

$$(A_i)^2 = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2$$

або

$$\sum_{i=0}^3 A^i A_i = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3.$$

Подібні суми позначають як $A^i A_i$, випускаючи знак суми.

Скалярний добуток двох чотиривимірних векторів визначають у такий спосіб:

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3. \quad (2.3)$$

Квадрати чотиривимірних векторів $A^i A_i$, а також їх скалярні добутки $A^i B_i$, мають однакові значення в усіх інерціальних системах відліку (інваріанти щодо перетворень Лоренца). Чотиривимірний вектор A_i називається *просторовоподібним*, якщо $A^i A_i < 0$, або *часоподібним*, якщо $A^i A_i > 0$.

Інваріантна величина

$$s_{12} = \left[c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \right]^{1/2}$$

називається інтервалом між двома подіями з координатами (x_1, y_1, z_1, t) і (x_2, y_2, z_2, t) .

Час, що відраховується за годинником, який рухається разом із об'єктом, називається *власним часом* цього об'єкта.

Якщо об'єкт рухається відносно системи S із швидкістю v , то інтервал власного часу $d\tau$ виражається через проміжок часу dt у системі S за формулою

$$d\tau = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Величина $dt\sqrt{1-\beta^2}$ є інваріантом щодо перетворень Лоренца.

Якщо деякий стрижень має довжину l_0 у його системі спокою, то під час руху зі швидкістю v уздовж своєї осі цей стрижень має в нерухомій системі відліку довжину

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Чотиривимірною швидкістю частинки називається чотиривимірний вектор, компоненти якого визначаються за формулою

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (2.4)$$

де $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ — звичайна швидкість частинки.

Із формули (2.4) очевидно випливає, що

$$u^i u_i = 1.$$

Чотиривимірна швидкість, як і будь-який інший чотиривимірний вектор, перетворюється за формулами (2.2).

Компоненти звичайної швидкості не є просторовими складовими будь-якого чотиривимірного вектора і перетворюються за формулами ($\vec{V} \parallel x$):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}.$$

Якщо швидкість частинки напрямлена до осі x під кутами ϑ і ϑ' у системах S і S' відповідно, то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta'}{v' \cos \vartheta' + V}; \quad v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}.$$

Чотиривимірним прискоренням частинки називається чотиривимірний вектор із компонентами

$$w^j = \frac{du^j}{ds} = \frac{d^2 x^j}{ds^2}.$$

Хвильовий вектор \vec{k} і частота ω плоскої електромагнітної хвилі є компонентами *хвильового* чотиривимірного вектора k^i :

$$k^i = (\omega/c, \vec{k}).$$

Тому фаза плоскої хвилі $\varphi = -k^i x_i = \vec{k}\vec{r} - \omega t$ є інваріантом.

Із формул (2.2) випливає формула перетворення кута ϑ між світловим променем та віссю x :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta'}{\gamma(\cos \vartheta' + \beta)} \quad \text{або} \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta'}.$$

* * *

Приклад 2.1. Нехай для вимірювання часу використовується періодичний процес відбиття світлового променя поперемінно від двох дзеркал, закріплених на кінцях стрижня довжиною l . Один період — це час руху променя від одного дзеркала до другого і у зворотному напрямку. Світловий годинник нерухомий в системі S' та орієнтований паралельно напрямку руху. Користуючись постулатом про незмінність швидкості світла, показати, що інтервал власного часу $d\tau$ виражається через проміжок часу dt в системі S формулою $d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Розв'язання. У системі S' період $T' = 2l/c$, у системі S час T_1 руху світлового променя вздовж стрижня в напрямку відносної швидкості V обчислюється за рівнянням

$$T_1 = \frac{1}{c} (l\sqrt{1 - V^2/c^2} + VT_1),$$

Час руху в зворотному напрямку T_2 визначаємо заміною V на $-V$. Знаходимо відношення T' до $T = T_1 + T_2$:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

звідки випливає:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Приклад 2.2. Вивести формули лоренцевого перетворення від системи S' до системи S для радіуса-вектора \vec{r} та часу t , не вважаючи, що швидкість \vec{V} системи S' відносно S паралельна осі x . Результат подати у векторній формі.

Указівка. Розкласти \vec{r} на поздовжню та поперечну відносно \vec{V} компоненти і скористатися перетвореннями Лоренца (2.1).

Розв'язання. Розкладемо \vec{r} на тангенціальну (напрямок \vec{r}_{\parallel} у будь-який момент часу збігається з напрямком швидкості \vec{V}) і нормальну (\vec{r}_{\perp} перпендикулярний до \vec{V}) складові:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}.$$

Аналогічно для \vec{r}' (рис. 2.1) маємо

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}.$$

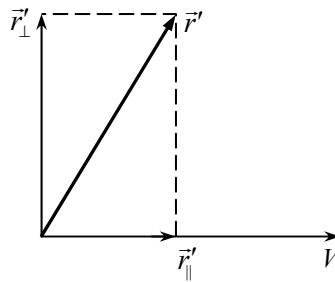


Рис. 2.1

За правилами векторного аналізу сформуємо вектори в потрібних напрямках:

$$\vec{r}'_{\parallel} = \vec{V} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{V^2}; \quad \vec{r}'_{\perp} = \lambda \frac{[\vec{V} \times \vec{r}'] \times \vec{V}}{V^2};$$

тут $\vec{n} = \vec{V}/V$ — одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямком вектора \vec{V} ; λ — коефіцієнт пропорційності, який підбирається так, щоб довжина вектора була правильною.

Знайдемо λ . Для цього перепишемо перпендикулярну складову радіуса-вектора \vec{r}' :

$$\vec{r}'_{\perp} = \lambda [[\vec{n} \times \vec{r}'] \times \vec{n}]$$

і знайдемо його довжину:

$$\begin{aligned} |\vec{r}'_{\perp}| &= \lambda \left| \left[\left[\vec{n} \times \vec{r}' \right] \times \vec{n} \right] \right| = \lambda \cdot \left| \left[\vec{n} \times \vec{r}' \right] \right| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \lambda \cdot \left| \left[\vec{n} \times \vec{r}' \right] \right| = \\ &= \lambda \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{r}'| \cdot \sin \vartheta = \lambda \cdot |\vec{r}'| \cdot \sin \vartheta . \end{aligned}$$

З іншого боку, з рис. 2.1 бачимо, що

$$|\vec{r}'_{\perp}| = |\vec{r}'| \cdot \sin \vartheta .$$

Отже, $\lambda = 1$. Таким чином,

$$\vec{r}'_{\perp} = \frac{\left[\vec{V} \times \vec{r} \right] \times \vec{V}}{V^2} .$$

Застосуємо до \vec{r}'_{\parallel} і \vec{r}'_{\perp} перетворення Лоренца:

$$\vec{r}'_{\parallel} = \frac{\vec{r}'_{\parallel} + \vec{V}t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} ; \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}'_{\perp} . \quad (2.5)$$

Підставимо у формули (2.5) отримані нами \vec{r}'_{\parallel} і \vec{r}'_{\perp} і знайдемо \vec{r} :

$$\vec{r} = \frac{\vec{V} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{V^2} + \vec{V}t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{\left[\vec{V} \times \vec{r} \right] \times \vec{V}}{V^2} .$$

Перетворення Лоренца для часу набуває вигляду

$$t = \frac{t' + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{V}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

Приклад 2.3. Пучок світла в деякій системі відліку утворює тілесний кут $d\Omega$. Як зміниться цей кут при переході до іншої інерціальної системи відліку?

Розв'язання. Розглянемо в системі S пучок світла всередині тілесного кута $d\Omega$. У сферичній системі координат тілесний кут $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$.

У системі S' цей пучок буде спостерігатися всередині кута $d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\alpha' = -d(\cos \vartheta') d\alpha'$.

Кут $\alpha = \alpha'$. Відповідно $d\alpha = d\alpha'$.

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta};$$

$$\begin{aligned} d(\cos \vartheta') &= \frac{d(\cos \vartheta) \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right) + \left(\cos \vartheta - \frac{V}{c}\right) d(\cos \vartheta)}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)^2} = \\ &= d(\cos \vartheta) \frac{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta + \frac{V}{c} \cos \vartheta - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)^2} = -\sin \vartheta \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)^2}; \\ d\Omega' &= \frac{\sin \vartheta \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)^2} d\vartheta d\alpha = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right)^2} d\Omega. \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Довжину стрижня, що рухається вздовж своєї осі в деякій системі відліку, можна визначити таким чином: виміряти проміжок часу, протягом якого стрижень проходить повз фіксовану точку цієї системи, і помножити його на швидкість стрижня. Показати, що за такого методу вимірювання спостерігається звичайне лоренцове скорочення довжини.

2.2. Система S' рухається відносно системи S зі швидкістю V . У момент часу, коли початки координат збігалися, годинники, що містяться в кожній системі координат, показували один і той самий час: $t = t' = 0$. Які координати в кожній із цих систем надалі буде мати світлова точка, яка має таку властивість: годинники систем S і S' , розміщені в ній, показують один і той самий час: $t = t'$? Визначити закон руху цієї точки.

Відповідь. Координати годинників, що показують однаковий час, $t = t'$, у системах S і S' :

$$x = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{V}\right) t, \quad x' = -\frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{V}\right) t. \quad (2.6)$$

Із формул (2.6) видно, що точка, у якій $t = t'$, рухається рівномірно у кожній із систем S і S' . Якщо ввести систему відліку, відносно якої ця точка нерухома, то S і S' рухаються у протилежні боки з однаковими швидкостями $V_0 = \frac{c^2}{V} \left(1 - \frac{1}{V}\right)$ (V_0 являє собою релятивістську «половину» швидкості V у тому сенсі, що релятивістський добуток двох швидкостей V_0 становить V).

2.3. Нехай для вимірювання часу використовується періодичний процес відбиття світлового променя почергово від двох дзеркал, закріплених на кінцях стрижня довжиною l . Один період — це час руху променя від одного дзеркала до іншого і у зворотному напрямку. Користуючись постулатом про незмінність швидкості світла, показати, що інтервал власного часу $d\tau$ виражається через проміжок часу dt у системі S формулою $d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Світловий годинник нерухомий в системі S' і орієнтований: а) паралельно напрямку руху; б) перпендикулярно до напрямку руху стрижня.

Відповідь. У системі S' тривалість одного періоду $T' = 2l/c$; у системі S час T_1 руху «зайчика» вздовж стрижня в напрямку відносно швидкості V розраховується за рівнянням

$$T_1 = \frac{1}{c} \left(l\sqrt{1 - V^2/c^2} + VT_1 \right),$$

час руху у зворотному напрямку T_2 визначається заміною V на $-V$.

Для відношення T' до $T = T_1 + T_2$ знаходимо

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

звідки випливає:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

2.4. Потяг $A'B'$, довжина якого $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$ км у системі, де він перебуває у спокої, рухається зі швидкістю $V = 240000$ км/с повз платформу, що має таку саму довжину у своїй системі спокою. У голові B' і хвості A' потяга розміщені однакові годинники, синхронізовані між собою. Такі ж годинники встановлені на початку A і в кінці B платформи. У момент часу, коли голова потяга перетинає початок платформи, відповідні годинники показували 12 год 00 хв. Відповіді на запитання: а) чи можна стверджувати, що в цей момент часу у деякій системі відліку всі годинники показують 12 год 00 хв; б) який час показує кожний з годинників у момент часу, коли хвіст потяга перетинає початок платформи; в) який час показує кожний з годинників у момент, коли голова потяга перетинає кінець платформи.

Відповідь. а) Не можна. 12 год 00 хв можуть показати одночасно два годинники в одній із систем відліку і тільки один годинник в іншій системі відліку.

б) Показання годинників, що просторово збігаються, не залежать від вибору системи відліку:

$$t_{A'} = 12 \text{ год } 00 \text{ хв} + \frac{l_0}{V} = 13 \text{ год } 00 \text{ хв};$$

$$t_A = 12 \text{ год } 00 \text{ хв} + \frac{l_0}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 12 \text{ год } 36 \text{ хв}.$$

Показання решти годинників B і B' будуть залежати від вибору системи відліку внаслідок відносності одночасності.

Із точки спостереження на платформі (рис. 2.2, а):

$$t_{B'} = 12 \text{ год } 21,6 \text{ хв}, \quad t_B = t_A = 12 \text{ год } 36 \text{ хв}.$$

Із точки спостереження у потязі (рис. 2.2, б):

$$t_{B'} = t_{A'} = 13 \text{ год } 00 \text{ хв}, \quad t_B = 13 \text{ год } 14,4 \text{ хв}.$$

в) Із точки спостереження на платформі:

$$t_A = 13 \text{ год } 00 \text{ хв} = t_B, \quad t_{B'} = 12 \text{ год } 36 \text{ хв}, \quad t_{A'} = 13 \text{ год } 14,4 \text{ хв}.$$

Із точки спостереження у потязі:

$$t_A = 12 \text{ год } 21,6 \text{ хв}, \quad t_{A'} = t_{B'} = 12 \text{ год } 36 \text{ хв}, \quad t_B = 13 \text{ год } 00 \text{ хв}.$$

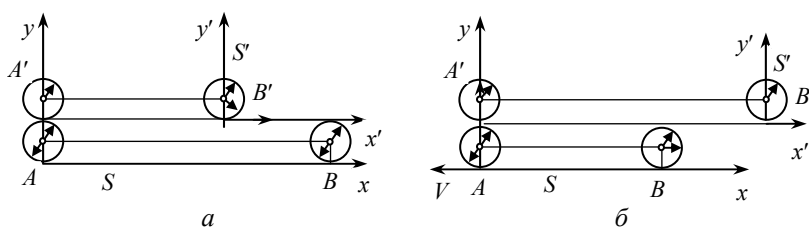


Рис. 2.2

У всіх випадках відстають ті годинники, показання яких доводиться порівнювати з показаннями двох годинників в іншій системі відліку.

2.5. Два масштаби (рис. 2.3, 1 і 2), кожен з яких має довжину l_0 у власній його системі спокою, рівномірно рухаються назустріч один одному паралельно спільній осі x . Спостерігач, пов'язаний з одним із масштабів, зауважив, що час між збігом лівих і правих кінців масштабів становить Δt . Яка відносна швидкість v масштабів? У якій послідовності збігаються їх кінці для спостерігачів, пов'язаних з кожним із масштабів, а також для спостерігача, відносно якого обидва масштаби рухаються з однаковою швидкістю у зворотному напрямку?

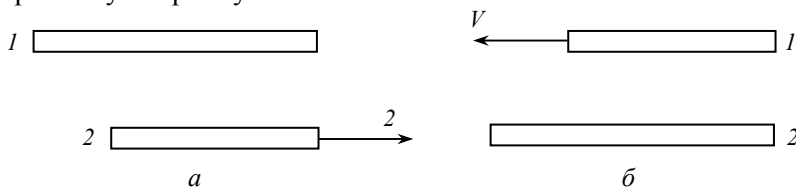


Рис. 2.3

Відповідь.
$$v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}.$$

Для спостерігача, пов'язаного з масштабом 1 (рис. 2.3, а), збігаються спочатку ліві кінці, потім праві; для спостерігача, пов'язаного з другим масштабом 2 (рис. 2.3, б) — навпаки. Із точки спостереження, відносно якого масштаби рухаються з однаковою швидкістю, кінці збігаються одночасно.

2.6. Записати формули перетворення Лоренца для довільного чотиривимірного вектора $A_i = (A_0, \vec{A})$, не припускаючи, що швидкість системи S' відносно S паралельна до осі x .

$$\text{Відповідь. } A = \gamma^{-1} \left(\vec{A}' + \frac{\vec{V}}{c} A'_0 \right) + (\gamma^{-1} - 1) \frac{[\vec{A}' \times \vec{V}] \times \vec{V}}{V^2},$$

$$A_0 = \gamma^{-1} \left(A'_0 + \frac{\vec{A}' \cdot \vec{V}}{c} \right).$$

2.7. Вивести формули додавання швидкостей для випадку, коли швидкість \vec{V} системи S' відносно S має довільний напрямок. Формули записати у векторному вигляді.

$$\text{Відповідь. } \vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (\gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V^2} [(\vec{v}' \cdot \vec{V}) + V^2]}{\gamma \left(1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2} \right)},$$

де \vec{v} і \vec{v}' — швидкості в системах S і S' .

2.8. Задано три системи відліку: S, S', S'' . Система S'' рухається відносно S' паралельно осі x' зі швидкістю V' , S' — рухається відносно S паралельно осі x зі швидкістю V . Відповідні осі всіх трьох систем паралельні. Записати перетворення Лоренца від S'' до S і отримати з них формулу додавання паралельних швидкостей.

2.9. Довести формулу

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} - \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V}/c^2},$$

де \vec{v} і \vec{v}' — швидкості частинки в системах S і S' ; \vec{V} — швидкість S' відносно S .

2.10. Довести співвідношення

$$v = \frac{\sqrt{(\vec{v}' + \vec{V})^2 - [\vec{v}' \times \vec{V}]^2} / c^2}{1 + \vec{v}' \cdot \vec{V} / c^2},$$

де \vec{v} і \vec{v}' — швидкості частинки в системах S і S' ; \vec{V} — швидкість S' відносно S .

2.11. Два масштаби, кожний з яких має у власній системі спокою довжину l_0 , рухаються назустріч один одному з однаковими швидкостями v відносно деякої системи відліку. Яка довжина l кожного з масштабів, що вимірюється в системі відліку, пов'язаній з іншим масштабом?

Відповідь. $l = l_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}$.

2.12. Два пучки електронів летять назустріч одне одному зі швидкостями $v = 0,9c$ відносно лабораторної системи координат. Яка відносна швидкість V електронів: а) з точки спостереження в лабораторії; б) з точки спостереження, що рухається разом з одним із пучків електронів?

Відповідь. а) $V = 2 \cdot 0,9c = 1,8c$; б) $V = 0,994c$.

2.13. Вивести формули перетворення прискорення $\dot{\vec{v}}$ для випадку, коли система S' рухається відносно системи S із довільно напрямленою швидкістю \vec{V} . Подати ці формули перетворення у векторному вигляді.

Відповідь. $\dot{\vec{v}} = \frac{1}{\gamma^2 s^2} \dot{\vec{v}}' - \frac{(\gamma - 1)(\dot{\vec{v}}' \cdot \vec{V})\vec{V}}{\gamma^3 s^3 V^2} - \frac{(\dot{\vec{v}}' \cdot \vec{V})\vec{v}'}{\gamma^2 s^3 c^2}$,

де $s = 1 + \frac{\vec{v}' \cdot \vec{V}}{c^2}$.

2.14. Виразити компоненти чотиривимірного прискорення w^i через звичайне прискорення $\dot{\vec{v}}$ і швидкість \vec{v} частинки. Знайти w^i . Часоподібним чи просторовоподібним буде чотиривимірне прискорення?

Відповідь. $w^i w_i = -\gamma^6 \left(\dot{v}^2 - \left[\dot{\vec{v}} \times \frac{\vec{v}}{c} \right]^2 \right) = -\gamma^4 \left(\dot{v}^2 + \gamma^2 \vec{v}^2 \frac{\dot{v}^2}{c^2} \right) < 0,$

тобто чотиривимірне прискорення — просторовоподібний вектор.

2.15. Виразити прискорення \dot{v}' частинки в миттєво супутній їй інерціальній системі через її прискорення \dot{v} в лабораторній системі. Розглянути випадки, коли швидкість \vec{v} частинки змінюється тільки за величиною або тільки за напрямком.

Відповідь. Якщо швидкість частинки змінюється тільки за величиною, то $\dot{\vec{v}} \parallel \vec{v}$ і $\dot{v}' = \gamma^3 \dot{v}$.

Якщо швидкість частинки змінюється тільки за напрямком, то $\vec{v} \perp \dot{\vec{v}}$ і $\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} = 0$, отже $\dot{v}' = \gamma^2 \dot{v}$.

2.16. Релятивістська частинка здійснює рівноприскорений одновимірний рух (прискорення $\dot{v} \equiv w$ незмінне у власній системі відліку). Знайти залежність швидкості $v(t)$ і координати $x(t)$ частинки від часу t у лабораторній системі відліку, якщо початкова швидкість v_0 , а початкова координата x_0 . Розглянути, зокрема, нерелятивістський та ультрарелятивістський випадки.

Відповідь.
$$v(t) = \frac{\omega t + v_0 / \sqrt{1 - (v_0/c)^2}}{\sqrt{1 + \left| (\omega t)^2 / c^2 + (v_0/c)^2 / (1 - v_0^2/c^2) \right|^2}};$$

$$x(t) = \frac{c^2}{\omega} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{c^2} \left(\omega t + \frac{v_0}{1 - v_0^2/c^2} \right)^2} - \frac{v_0/c}{1 - v_0^2/c^2} \right\} + x_0.$$

В ультрарелятивістському випадку:

$$v(t) \approx c, \quad x(t) \approx ct - c^2/\omega.$$

У нерелятивістському випадку:

$$v(t) = v_0 + \omega t, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + 1/2 \omega t^2.$$

2.17. Ракета розганяється від стану спокою до швидкості $v = \sqrt{0,9999} c$. Прискорення ракети становить $|\dot{\vec{v}}| = 20 \text{ м/с}^2$ у системі, що миттєво супроводжує ракету.

Скільки часу триває розгін ракети за годинником у нерухомій системі відліку і за годинником у ракеті?

Указівка. Вплив сил інерції на хід годинника в ракеті не враховувати.

Відповідь. Час розгону за годинником у нерухомій системі:

$$T = \frac{1}{|\dot{v}|} \int_0^v \frac{dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{v}{|\dot{v}| \sqrt{1-v^2/c^2}} = 47,5 \text{ року.}$$

Час розгону за годинником у системі, пов'язаній з ракетою,

$$\tau = \frac{c}{2|\dot{v}|} \ln \left| \frac{1+v/c}{1-v/c} \right| = 2,5 \text{ року.}$$

2.18. Відносно системи S рухаються система S' зі швидкістю \vec{V} і два тіла зі швидкостями \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Який кут α буде спостерігатися між швидкостями цих тіл у системі S та системі S' ? Що відбувається з кутом α між швидкостями двох тіл, коли швидкість системи S' відносно S наближається до c ?

Відповідь. У системі S : $\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$. У системі S'

$$\cos \alpha' = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{V}) \cdot (\vec{v}_2 - \vec{V}) - \frac{1}{c^2} [\vec{v}_1 \times \vec{V}] \cdot [\vec{v}_2 \times \vec{V}]}{\sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{V})^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v}_1 \times \vec{V}]^2} \sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{V})^2 - \frac{1}{c^2} [\vec{v}_2 \times \vec{V}]^2}}.$$

2.19. У деякий момент часу напрямок променя світла від зірки має кут θ з орбітальною швидкістю \vec{v} Землі (у системі, пов'язаній із Сонцем). Знайти зміну напрямку від Землі на зірку за півроку (аберація світла), не враховуючи наближень, пов'язаних із малістю v/c .

2.20. Якщо вважати, що зірки в найближчій до нас частині Галактики розподілені рівномірно, то який буде їх розподіл $dN/d\Omega'$ для спостерігача в ракеті, що летить зі швидкістю, близькою до швидкості світла?

Відповідь. $\frac{dN}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \cdot \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta \cos \vartheta')^2}$, де N_0 — повне число видимих зірок.

2.21. Знайти формули перетворення частоти ω (ефект Доплера) і хвильового вектора \vec{k} плоскої монохроматичної світлової хвилі при переході від однієї інерціальної системи до іншої. Напрямок відносної швидкості \vec{V} довільний.

Відповідь.
$$\omega = \gamma \omega' \left(1 + \frac{\vec{n}' \cdot \vec{V}}{c} \right) \text{ або } \omega = \frac{\omega'}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{V}}{c} \right)},$$

$$\vec{k} = \gamma \left(\vec{k}' + \frac{\vec{V} \omega'}{c^2} \right) + (\gamma - 1) [\vec{k}' \times \vec{V}] \times \frac{\vec{V}}{V^2},$$

де $\vec{n} = \vec{k}/k$, $\vec{n}' = \vec{k}'/k'$, $k = \omega/c$.

2.22. Знайти частоту світлової хвилі, що спостерігається за поперечним ефектом Доплера (напрямок поширення світла перпендикулярний до напрямку руху джерела світла в системі, пов'язаній з приймачем світла). Який напрямок поширення хвилі в системі, пов'язаній з джерелом?

Відповідь. Якщо ω_0 — частота у тій системі, де джерело перебуває в спокої і V — швидкість джерела відносно приймача світла, то приймач покаже меншу частоту $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$ (червоне зміщення). Кут α променя з напрямком руху джерела в системі його спокою обчислюється за формулою

$$\cos \alpha = -\frac{V}{c}.$$

Кут α близький до 90° тільки якщо $V \ll c$. Якщо $V \rightarrow c$, тоді $\alpha \rightarrow \pi$.

2.23. Довжина хвилі світла, що випромінюється деяким джерелом, у тій системі, де джерело перебуває у спокої, дорівнює λ_0 . Яку довжину хвилі λ зареєструють: а) спостерігач, що наближається зі швидкістю V до джерела; б) спостерігач, що віддаляється з такою ж швидкістю від джерела?

Відповідь. а) $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}$; б) $\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}$.

2.24. Дзеркало рухається: а) нормально до власної площини зі швидкістю \vec{V} ; б) поступально вздовж власної площини зі швидкістю \vec{V} . Знайти закон відбиття плоскої монохроматичної хвилі від такого дзеркала, який замінює закон рівності кутів падіння та відбиття, якщо $V = 0$, а також закон перетворення частоти хвилі під час її відбиття. Розглянути, зокрема, випадок $V \rightarrow c$.

2.25. Увести хвильовий чотиривимірний вектор, що описує поширення плоскої монохроматичної хвилі в середовищі з показником заломлення n , яке рухається зі швидкістю V (фазова швидкість хвилі в нерухомому середовищі $v' = c/n$). Знайти формули перетворення частоти, а також кута між хвильовим вектором і напрямком швидкості руху середовища та фазової швидкості хвилі.

2.2. Чотиривимірні вектори та тензори

У разі переходу від однієї інерціальної системи до іншої компоненти чотиривимірного вектора перетворюються за формулами

$$A^i = \alpha^i_k A'^k, \quad (2.7)$$

де матриця перетворення α^i_k має вигляд

$$\alpha^i_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вона відповідає перетворенню (2.1), за якого однойменні координатні осі систем S і S' паралельні, відносна швидкість напрямлена вздовж осі x , початки координат обох систем, якщо $t = t' = 0$, збігаються.

Матриця перетворення задовольняє співвідношення

$$\alpha^{il} \alpha_l^k = g^{ik}, \quad \alpha_l^i \alpha^{lk} = g^{ik},$$

де g^{ik} — метричний тензор, що має вигляд

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Знаки на головній діагоналі метричного тензора відповідають знакам у формулі (2.3), яка визначає скалярний добуток двох чотиривимірних векторів.

Перетворення, обернене до формули (2.7), записується таким чином:

$$A'^i = \alpha_i^k A_k. \quad (2.9)$$

Координати світної точки утворюють чотиривимірний вектор і перетворюються за формулами (2.7), (2.9).

Для послідовного виконання двох перетворень Лоренца відповідні матриці перемножуються за звичайним правилом множення матриць.

Чотиривимірним тензором другого рангу називається сукупність 16 величин A^{ik} , які при перетворенні координат перетворюються як добутки компонент двох чотиривимірних векторів. Аналогічним чином визначаються і чотиривимірні тензори вищих рангів.

Компоненти чотиривимірного тензора другого рангу можна подати як контраваріантні A^{ik} , коваріантні A_{ik} та змішані A^i_k або A_i^k (які слід розрізняти, стежачи, який саме індекс — перший чи другий — верхній або нижній). Зв'язок між різними типами компонент визначається за загальним правилом: піднесення чи випускання часового індексу (0) не змінює, а піднесення чи випускання просторового індексу (1, 2, 3) змінює знак компоненти:

$$\begin{aligned} A_{00} &= A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \quad \dots, \\ A^0_0 &= A^{00}, \quad A^0_1 = A^{01}, \quad A^1_0 = -A^{01}, \quad A^1_1 = -A^{11}, \quad \dots \end{aligned}$$

Тензор A^{ik} називається *симетричним*, якщо $A^{ik} = A^{ki}$, та *антисиметричним*, якщо $A^{ik} = -A^{ki}$. Усі діагональні компоненти антисиметричного тензора дорівнюють нулю. Змішані компоненти A^i_k та A_i^k симетричного тензора збігаються, тому їх записують як A_i^k , розмішуючи індекси один над одним.

Із компонентів тензора A^{ik} можна побудувати скаляр шляхом утворення суми

$$A^i_i = A^0_0 + A^1_1 + A^2_2 + A^3_3$$

(при цьому звичайно $A^i_i = A_i^i$). Таку суму називають *слідом тензора*, а про операцію його утворення кажуть як про *згортання* чи *спрощення* тензора.

Операцією згортання є скалярний добуток двох чотиривимірних векторів, тобто утворення скаляра $A^i B_i$ із тензора $A^i B_k$. Взагалі будь-яке згортання по парі індексів знижує ранг тензора на 2.

Одиничним чотиривимірним тензором називається тензор δ_k^i , для якого виконується рівність

$$\delta_k^i A^k = A^i$$

за будь-якого чотиривимірного вектора A^i . Очевидно, що компоненти цього тензора дорівнюють

$$\delta_k^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = k, \\ 0, & \text{якщо } i \neq k. \end{cases}$$

Його слід: $\delta_i^i = 4$. Підносячи один чи випускаючи інший індекс тензора δ_k^i , отримують контраваріантний чи коваріантний тензор, який позначають як g_{ik} або g^{ik} і називають *метричним тензором*. Тензори g_{ik} та g^{ik} мають однакові компоненти, які визначаються співвідношенням (2.8), причому індекс i нумерує рядки, а індекс k — стовпці в порядку значень 0, 1, 2, 3. Очевидно, що

$$g_{ik} A^k = A_i, \quad g^{ik} A_k = A^i.$$

Тоді скалярний добуток двох чотиривимірних векторів можна записати у вигляді

$$A^i A_i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k.$$

Компоненти тензорів δ_k^i , g_{ik} , g^{ik} однакові в усіх системах координат. Таку саму властивість має і цілком антисиметричний одиничний чотиривимірний тензор четвертого рангу e^{iklm} . Так називається тензор, компоненти якого змінюють знак при перестановці будь-яких двох індексів, причому відмінні від нуля компоненти

дорівнюють ± 1 . Компоненти цього тензора, у яких хоча б два індекси збігаються, дорівнюють нулю. Відмінними від нуля є лише ті компоненти, у яких всі чотири індекси різні. Покладемо $e^{0123} = +1$ (при цьому $e_{0123} = -1$). Тоді всі відмінні від нуля компоненти e^{iklm} дорівнюють $+1$ або -1 . Кількість таких компонент дорівнює $4! = 24$. Тому $e^{iklm} e_{iklm} = -24$.

Під час поворотів системи координат величини e^{iklm} поводять себе як компоненти тензора; однак у разі зміни знака однієї чи трьох координат компоненти e^{iklm} , будучи визначеними однаково для всіх систем координат, не змінюються, у той час, як компоненти тензора мали б змінити знак. Тому e^{iklm} є не тензор, а псевдотензор. *Псевдотензори* будь-якого рангу, зокрема *псевдоскаляри*, поводять себе як тензори за всіх перетворень координат, за винятком тих, які не можуть бути зведені до поворотів, тобто за винятком відображень — змін знаків координат, що не зводяться до обертання.

Цілоком антисиметричним одиничним псевдотензором третього рангу називається сукупність величин $e_{\alpha\beta\gamma}$, що змінюють знак при перестановці будь-яких двох індексів. Відмінні від нуля є лише компоненти $e_{\alpha\beta\gamma}$ із трьома різними індексами. При цьому вважаємо, що $e_{xyz} = 1$, а всі інші дорівнюють $+1$ або -1 , залежно від того, парним чи непарним числом перестановок можна звести послідовність α, β, γ до послідовності x, y, z .

Добутки $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\lambda\mu\nu}$ складають істинний тривимірний тензор шостого рангу і тому виражаються у вигляді комбінацій добутків компонентів одиничного тривимірного тензора $\delta_{\alpha\beta}$.

У разі відображення системи координат, тобто зміни знака всіх координат, компоненти звичайного тривимірного вектора теж змінюють знак. Такі вектори називають *полярними*. Компоненти ж вектора, який може бути поданий як векторний добуток двох полярних векторів, при відображенні не змінюють знаку. Такі вектори називаються *аксіальними*. Скалярний добуток полярного та аксіального векторів є не істинним, а псевдоскаляром: при відображенні координат він змінює знак.

* * *

2.26. Довести рівності:

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A_i B_i = A^i g_{ik} B^k, \quad g_{ik} g^{kl} = \delta_i^l, \quad \delta_i^i = 4,$$

де g_{ik} — метричний тензор (2.8); A_i і B_i — чотиривимірні вектори. Для знаходження суми за двома індексами, які повторюються, використати правило знаків.

2.27. Показати, що тензор g_{ik} має однаковий вигляд в усіх інерціальних системах координат.

2.28. Показати, що компоненти A^1, A^2, A^3 чотиривимірного вектора $A^i = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ при просторових поворотах перетворюються як компоненти тривимірного вектора $\vec{A} = (A^1, A^2, A^3)$, а компонента A^0 є тривимірним скаляром.

2.29. Знайти, на які тривимірні тензори розщеплюється чотиривимірний тензор другого рангу при просторових поворотах.

Відповідь. На тривимірний тензор другого рангу $A_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), два тривимірні вектори $A_{0\alpha}$ і $A_{\alpha 0}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) і тривимірний скаляр A_{00} .

2.30. Показати, що компоненти антисиметричного чотиривимірного тензора другого рангу перетворюються при просторових поворотах як компоненти двох незалежних тривимірних векторів.

Відповідь. Антисиметричний чотиривимірний тензор A_{ik} можна подати у вигляді

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & A_1 & -A_2 \\ B_2 & -A_3 & 0 & A_1 \\ B_3 & A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix},$$

де $A = (A_1, A_2, A_3)$ і $B = (B_1, B_2, B_3)$ — тривимірні вектори (точніше B — полярний, а A — аксіальний вектор).

2.31. Довести, що величина e^{iklm} , визначення якої наведено в цьому підрозділі, дійсно перетворюється як псевдотензор.

2.32. Довести рівності: а) $e^{iklm}e_{prlm} = -2(\delta_p^i\delta_r^k - \delta_r^i\delta_p^k)$,

б) $e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta_p^i$.

2.33. Довести рівність

$$e^{iklm}e_{lmrs}A_iB_kC^rD^s = 2(A_iD^i)(B_kC^k) - 2(A_iC^i)(B_kD^k).$$

2.34. Скласти чотиривимірний вектор із частинних похідних $\partial\varphi/\partial x^i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), де φ — скалярна величина. Знайти вираз для компонент ∇_i оператора чотиривимірного градієнта.

Відповідь. Інваріантна величина (чотиривимірний диференціал)

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}dx^0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^3}dx^3$$

має такий же вигляд у всіх інерціальних системах відліку; оскільки dx^i ($i = 0, 1, 2, 3$) — компоненти чотиривимірного вектора, то сукупність величин

$$\nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} \right),$$

також є чотиривимірним вектором. Таким чином, оператор чотиривимірного градієнта, визначений у вигляді

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right),$$

де ∇ — оператор тривимірного градієнта, перетворюється як чотиривимірний вектор.

2.35. Скласти чотиривимірний тензор T^{ik} із частинних похідних $\partial A_i/\partial x^k$ ($i = 0, 1, 2, 3$), де A^i — чотиривимірний вектор. Показати, що чотиривимірна дивергенція $\partial A^i/\partial x^i$ є інваріантом щодо перетворень Лоренца.

Відповідь. $T_{ik} = \nabla_k A_i$, $\nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$.

Чотиривимірна дивергенція

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = \text{inv.}$$

2.36. Знайти закон перетворення величин:

а) $A^i A_i$; б) $T_{ik} A^k$, якщо A^k — чотиривимірний вектор, а T^{ik} — чотиривимірний тензор.

Відповідь. а) скаляр; б) чотиривимірний вектор.

2.37. Записати перетворення Лоренца (2.1) у змінних $x^1, x^2, x^3, x^0 = ct$. Величину відносної швидкості V виразити через кут α за формулою $V/c = \text{th } \alpha$.

Відповідь. Якщо $x^i = \alpha^i_k x'^k$, то матриця $\hat{\alpha}$ має вигляд

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & -\text{sh } \alpha & 0 & 0 \\ \text{sh } \alpha & -\text{ch } \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.3. Релятивістська електродинаміка

Запишемо основні формули релятивістської електродинаміки у вакуумі. Густина тривимірного струму $\vec{j} = \rho \vec{v}$ і густина заряду ρ утворюють чотиривимірний вектор густини струму

$$j^i = (c\rho, \vec{j}).$$

Електричне і магнітне поля є компонентами антисиметричного чотиривимірного тензора електромагнітного поля F^{ik} :

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Під час переходу від системи S до системи S' компоненти поля перетворюються за формулами (осі x і x' паралельні напрямку відносної швидкості):

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma^{-1}(E'_y + \beta H'_z), \quad E_z = \gamma^{-1}(E'_z - \beta H'_y);$$

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \gamma^{-1}(H'_y - \beta E'_z), \quad H_z = \gamma^{-1}(H'_z + \beta E'_y).$$

Величини

$$H^2 - E^2 = \text{inv}, \quad \vec{E} \cdot \vec{H} = \text{inv} \quad (2.10)$$

є інваріантами щодо перетворень Лоренца. Векторний \vec{A} і скалярний ϕ потенціали утворюють *чотиривимірний вектор потенціалу*

$$A^i = (\phi, \vec{A}).$$

Компоненти *тензора енергії-імпульсу* у вакуумі визначаються за формулою

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{il} F^k{}_l + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right).$$

Дев'ять просторових компонентів тензора T^{ik} утворюють три-вимірний *тензор напруг Максвелла*

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left\{ (E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta) - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right\}.$$

Просторово-часові компоненти T^{ik} пропорційні складовим густини потоку енергії \vec{S} і густини імпульсу поля \vec{g} :

$$T_{0\alpha} = \frac{1}{c} S_\alpha, \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}, \quad T_{0\alpha} = c g_\alpha, \quad \vec{g} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}.$$

Часова компонента T^{ik} пов'язана з густиною енергії поля w співвідношенням

$$T_{00} = w = (1/8\pi)(E^2 + H^2).$$

Дивергенція тензора T^{ik} визначає об'ємну густину сил $f^i = (\vec{v} \cdot \vec{f}/c, \vec{f})$, які діють на заряди:

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = f_i = \frac{1}{c} F_{ik} j^k.$$

Перейдемо тепер до формул електродинаміки за наявності середовищ. У цьому випадку вектори поля \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} утворюють два антисиметричні чотиривимірні тензори другого рангу: тензор поля

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

і тензор індукції

$$H^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектори поляризації та намагніченості \vec{P} і \vec{M} також утворюють чотиривимірний тензор

$$M^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & -M_z & M_y \\ P_y & M_z & 0 & -M_x \\ P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Формули $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ і $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ об'єднуються в одне співвідношення

$$H^{ik} = F^{ik} - 4\pi M^{ik}.$$

Чотиривимірна сила f^i , прикладена до одиниці об'єму з боку поля, визначається як

$$f^i = \left(\frac{1}{c} (Q + \vec{f} \cdot \vec{v}), \vec{f} \right),$$

де \vec{f} — пондеромоторна сила, прикладена до одиниці об'єму; Q — тепло Джоуля–Ленца, що виділяється за одиницю часу в одиниці об'єму.

* * *

Приклад 2.4. У системі відліку S створено однорідне електромагнітне поле \vec{E} , \vec{H} . Із якою швидкістю відносно S має рухатись S' , у якій $\vec{E}' \parallel \vec{H}'$? Чи завжди ця система має розв'язок і чи він єдиний? Чому дорівнюють абсолютні значення \vec{E}' та \vec{H}' ?

Розв'язання. Задача має нескінченну кількість розв'язків. Якщо знайдено систему S' (що рухається зі швидкістю \vec{V}), у якій $\vec{E}' \parallel \vec{H}'$, то в будь-якій системі відліку, що рухається відносно S' уздовж цього спільного напрямку, \vec{E} та \vec{H} будуть паралельні, як це випливає з рівняння (2.10). Будемо шукати у зв'язку з цим тільки ту систему відліку, S' , яка рухається перпендикулярно до площини \vec{E} , \vec{H} .

Із паралельності векторів \vec{E}' та \vec{H}' випливає, що $\vec{E}' \times \vec{H}' = 0$;

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{H}], \\ \vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}]; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}' \times \vec{H}' &= \left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] \right) \times \left(\vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}] \right) = \\ &= \vec{E} \times \vec{H} - \vec{E} \times \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{E}] + \frac{1}{c}[\vec{V} \times \vec{H}] \times \vec{H} - \frac{1}{c^2}[\vec{V} \times \vec{H}] \times [\vec{V} \times \vec{E}] = \\ &= [\vec{E} \times \vec{H}] - \frac{\vec{V}}{c}(E^2 - H^2) + [\vec{H} \times \vec{E}] \frac{V^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Маємо квадратне рівняння відносно $\frac{\vec{V}}{c}$:

$$[\vec{H} \times \vec{E}] \frac{V^2}{c^2} - (E^2 - H^2) \frac{\vec{V}}{c} + [\vec{E} \times \vec{H}] = 0;$$

$$D = (E^2 - H^2)^2 - 4(\vec{E} \cdot \vec{H});$$

$$\left(\frac{\vec{V}}{c}\right)_{1,2} = \frac{(E^2 - H^2) \pm \sqrt{(E^2 - H^2)^2 - 4(\vec{E} \cdot \vec{H})}}{2[\vec{E} \times \vec{H}]}$$

Ураховуючи, що $\frac{V}{c} \leq 1$, із двох розв'язків залишаємо:

$$\frac{\vec{V}}{c} = \frac{(E^2 - H^2) \pm \sqrt{(E^2 - H^2)^2 - 4(\vec{E} \cdot \vec{H})}}{2[\vec{E} \times \vec{H}]}$$

За допомогою інваріантів поля отримаємо:

$$H^2 - E^2 = H'^2 - E'^2;$$

$$E'^2 = \frac{1}{2} \left[E^2 - H^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{H})^2} \right];$$

$$H'^2 = \frac{1}{2} \left[H^2 - E^2 + \sqrt{(E^2 - H^2)^2 + 4(\vec{E} \cdot \vec{H})^2} \right].$$

Задачі для самостійного розв'язання

2.38. Знайти закон перетворення компонент електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів у вакуумі при переході до системи S' , що рухається відносно системи S із довільно напрямленою швидкістю \vec{V} .

Відповідь. У вакуумі:

$$\vec{E} = \gamma \left(\vec{E}' - \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{H}' \right) - (\gamma - 1) \vec{V} \frac{(\vec{V} \cdot \vec{E}')}{V^2},$$

$$\vec{H} = \gamma \left(\vec{H}' - \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E}' \right) - (\gamma - 1) \vec{V} \frac{(\vec{V} \cdot \vec{H}')}{V^2}.$$

2.39. Показати, що величина $\vec{E}^2 - \vec{H}^2$ інваріантна щодо перетворень Лоренца.

2.40. Довести, що якщо напруженості електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів перпендикулярні одне до одного в одній системі відліку, то вони перпендикулярні і в усіх інших інерціальних системах відліку.

2.41. У системі відліку S електричне \vec{E} і магнітне \vec{H} поля взаємно перпендикулярні. З якою швидкістю відносно S повинна рухатися система S' , у якій існуватиме тільки електричне або тільки магнітне поле? Чи завжди задача має розв'язок і чи єдиний він?

2.42. Показати, що хвильове рівняння не є інваріантним щодо перетворень Галілея і є інваріантним щодо перетворень Лоренца.

2.43. Знайти закон релятивістського перетворення тепла Джоуля–Ленца Q , виходячи з визначення чотиривимірної густини сили.

Відповідь. Нехай u^i — чотиривимірний швидкісний вектор. Складемо чотиривимірний інваріант:

$$-f_i u^i = \gamma(fv) - \gamma(Q + fv) = -\gamma Q = \text{inv.}$$

Якщо позначити через Q_0 кількість теплоти, що виділяється в одиницю об'єму середовища в одиницю часу у систему, де середовище покоїться, то $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$.

2.44. Знайти формули перетворення для компонентів тензора енергії-імпульсу T^{ik} при перетворенні Лоренца.

Відповідь.

$$\omega = \gamma^2 \left(\omega' + \frac{2\beta}{c} S'_x + \beta^2 T'_{xx} \right), S_x = \gamma^2 \left[(1 + \beta^2) S'_x + V\omega' + VT'_{xx} \right];$$

$$S_y = \gamma(S'_y + VT'_{xy}), S_z = \gamma(S'_z + VT'_{xz}), T_{xx} = \gamma^2 \left(T'_{xx} + \frac{2\beta}{c} S'_x + \beta^2 \omega' \right);$$

$$T_{yy} = T'_{yy}, T_{yz} = T'_{yz}, T_{zz} = T';$$

$$T_{xy} = \gamma \left(T'_{xy} + \frac{\beta}{c} S'_y \right), T_{xz} = \gamma \left(T'_{xz} + \frac{\beta}{c} S'_z \right).$$

2.45. Знайти шпур (суму діагональних елементів матриці) тензора енергії-імпульсу T^{ik} .

Відповідь. $T_i^i = 0$.

Розділ 3

РЕЛЯТИВІСТЬСЬКА МЕХАНІКА

3.1. Енергія та імпульс

Імпульс \vec{p} релятивістської частинки пов'язаний із її швидкістю \vec{v} співвідношенням:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

де m — маса спокою частинки.

Повна енергія частинки, що вільно рухається, може бути виражена через швидкість:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

або імпульс

$$\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

Кінетична енергія T частинки відрізняється від повної енергії на величину енергії спокою $E_0 = mc^2$:

$$T = \varepsilon - mc^2.$$

Енергія, імпульс і швидкість частинки пов'язані формулою

$$\varepsilon\vec{v} = c^2\vec{p}.$$

Енергія й імпульс частинки являють собою часову і просторові складові чотиривимірного вектора енергії-імпульсу (чотиривимірного імпульсу)

$$p^i = (\varepsilon/c, \vec{p}).$$

У разі переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої енергія та імпульс перетворюються за формулами (2.2). Квадрат чотиривимірного імпульсу є релятивістським інваріантом:

$$p^{i2} = \varepsilon^2/c^2 - p^2 = m^2c^2.$$

Частинка називається нерелятивістською, якщо її кінетична енергія мала, і ультрарелятивістською, якщо її кінетична енергія велика порівняно з енергією спокою. Швидкість ультрарелятивістської частинки близька до швидкості світла, її імпульс пов'язаний з енергією співвідношенням:

$$\varepsilon = cp .$$

Частинки з нульовою масою й енергією спокою (фотони, нейтрино) завжди є ультрарелятивістськими, їх швидкість точно дорівнює c . Енергія та імпульс фотона у вакуумі пов'язані з його частотою формулами:

$$\varepsilon = \hbar\omega , \quad p = \hbar\omega/c = \hbar k ,$$

де $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ ерг·с — стала Планка.

Повна енергія та імпульс замкненої системи частинок зберігаються. Звідси випливає, що коли до початку і після закінчення деякої реакції (розпаду або зіткнення) частинки не взаємодіють між собою, то повний чотиривимірний імпульс у початковому і кінцевому станах однаковий:

$$\sum_a p_a^{i(0)} = \sum_b p_b^i ,$$

де підсумовування виконується за всіма частинками, наявними до і після реакції.

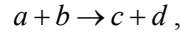
Розглядати зіткнення між частинками зручно за однією з двох систем відліку: лабораторною системою S або системою центра інерції S' , у якій повний імпульс \vec{p} усіх частинок системи дорівнює нулю. Варто звернути увагу на те, що іноді корисно використовувати інваріантність квадратів чотиривимірних імпульсів.

Розрізняють два типи зіткнень: пружні, за яких не змінюється внутрішній стан і, отже, маси частинок, і непружні, за яких змінюються внутрішні енергії (маси) частинок, що зіштовхуються, тобто зникають старі або народжуються нові частинки. За непружного зіткнення двох частинок сума мас $m_1 + m_2$ частинок, що зіштовхуються, відрізняється від суми M_k мас частинок, що утворюються після зіткнення, на величину:

$$\Delta M = m_1 + m_2 - M_k ,$$

яка називається *дефектом маси*.

Величина $Q = c^2 \Delta M$ називається *енергетичним виходом реакції*. Реакції, що перебігають за схемою



тобто такі, за яких дві частинки перетворюються в дві інші частинки, називаються *двочастинковими* (окремим випадком двочастинкової реакції є пружне розсіювання двох частинок).

Кінематику двочастинкових реакцій зручно описувати за допомогою інваріантних змінних s, t, u :

$$s = (p_a^i + p_b^i)^2, \quad t = (p_a^i - p_c^i)^2, \quad u = (p_a^i - p_d^i)^2,$$

де p_a^i, p_b^i, p_c^i — чотиривимірні імпульси частинок, що беруть участь у реакції.

Будь-яку з величин s, t, u можна виразити через дві інші за допомогою співвідношення:

$$s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) c^2.$$

Наочне уявлення про кінематику двочастинкової реакції дає кінематична площина, на якій відкладаються значення змінних s і t (або s, t і u).

Закони збереження енергії та імпульсу обмежують на кінематичній площині область значень s, t, u , у якій ця реакція має фізичний зміст.

Багато формул релятивістської кінематики набувають більш простого вигляду, якщо користуватися системою одиниць, у якій швидкість світла $c = 1$. При цьому маса, енергія й імпульс вимірюються в однакових одиницях, наприклад Мев (1 Мев = 10^6 ев = 10^{-3} Гев = $1,602 \cdot 10^{-6}$ ерг). У ряді випадків маси елементарних частинок вимірюють в одиницях маси електрона m_e (тобто використовують систему одиниць, у якій $m_e = 1$).

Енергією зв'язку називається величина:

$$B = \Delta M c^2 = \sum \varepsilon_{0н} - \varepsilon_{0я},$$

де $\varepsilon_{0н}$ — енергія спокою нуклона; $\varepsilon_{0я}$ — енергія спокою ядра.

* * *

Приклад 3.1. Потік монохроматичних μ -мезонів, що утворилися у верхніх шарах атмосфери, падає вертикально вниз. Знайти відношення інтенсивності потоку μ -мезонів на висоті h над рівнем моря (I_h) та на рівні моря (I_0), вважаючи, що в шарі повітря товщиною h відбувається тільки ослаблення потоку за природного розпаду μ -мезонів. Енергія μ -мезонів $\varepsilon = 4,2 \cdot 10^8$ ев, $h = 3$ км, середній власний час життя μ -мезона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с.

Розв'язання. Відношення інтенсивностей:

$$\frac{I_h}{I_0} = \exp \frac{h}{v\tau};$$

$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ — час життя μ -мезона, що рухається зі швидкістю v ;

$$\frac{I_h}{I_0} = \exp \frac{h \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} mc^2}{v \tau_0 mc^2} = \frac{h}{c \tau_0} \frac{mc^2}{E} \approx 2,5.$$

Якби релятивістське перетворення часу не відбулося, то для відношення інтенсивностей (припускається, що швидкість мезонів дорівнює c):

$$\frac{I'_h}{I'_0} \approx \exp \frac{h}{\tau_0 c} \approx 94,4.$$

Спостереження підтверджують перший результат ($I_h/I_0 \approx 2,5$) і тим самим дають прямий експериментальний доказ існування релятивістського ефекту уповільнення ходу годинника, який рухається.

Приклад 3.2. Знайти залежність енергії γ -кванта, що виникає внаслідок розпаду π^0 -мезона, від кута ϑ між напрямком поширення кванта та руху π -мезона.

Визначити енергетичний спектр γ -квантів розпаду в лабораторній системі відліку.

Указівка. Із законів збереження енергії та імпульсу випливає, що в системі спокою π^0 -мезона енергія γ -кванта $\varepsilon' = mc^2/2$ (m — маса π^0 -мезона).

Розв'язання. Оскільки імпульс фотона $p = \varepsilon/c$, то

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)}, \quad \varepsilon' = \frac{mc^2}{2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Порівнюючи вираз, який випливає з $d\varepsilon = -\frac{\varepsilon'd(1 - \beta \cos \vartheta)}{\gamma(1 - \beta \cos \vartheta)^2}$

з кутовим розподілом γ -квантів розпаду, отримуємо розподіл імовірностей для енергій фотонів розпаду:

$$dW(\varepsilon) = \frac{|d\varepsilon|}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}},$$

де $\varepsilon_{\min} = \varepsilon' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$ — мінімальне значення енергії γ -кванта розпаду (якщо $\vartheta = \pi$), $\varepsilon_{\max} = \varepsilon' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ — максимальне значення енергії γ -кванта розпаду (якщо $\vartheta = 0$).

Звідси видно, що спектр γ -квантів розпаду має в лабораторній системі відліку прямокутну форму, тобто будь-які значення енергії у проміжку від ε_{\min} до ε_{\max} рівноймовірні.

Приклад 3.3. Вільне збуджене ядро, що покоїться (енергія збудження $\Delta\varepsilon$), випромінює γ -квант. Знайти його частоту ω . Маса збудженого ядра m . У чому причина того, що $\omega \neq \Delta\varepsilon/\hbar$? Як зміниться результат, якщо ядро жорстко закріплено в кристалічній ґратці (ефект Мессбауера)?

Розв'язання. Запишемо для ядра, що випромінює γ -квант, закон збереження енергії і закон збереження імпульсу:

$$\varepsilon + \Delta\varepsilon = \hbar\omega + \varepsilon + \varepsilon_\beta,$$

де $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ — енергія вільного збудженого ядра; $\hbar\omega$ — енергія γ -кванта; $\varepsilon + \varepsilon_\beta$ — енергія ядра після випромінювання, включаючи енергію віддачі:

$$0 = p_\gamma - p_\beta;$$

$$p_\beta = p_\gamma = \frac{\Delta\varepsilon}{c};$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{p_\beta^2}{2m} = \frac{\Delta\varepsilon^2}{2mc^2};$$

$$\hbar\omega = \Delta\varepsilon - \varepsilon_\beta = \Delta\varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon^2}{2mc^2} = \Delta\varepsilon \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{2mc^2} \right);$$

$$\omega = \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar} \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon}{2mc^2} \right).$$

Енергія $\hbar\omega$, яку виносить квант, менша за $\Delta\varepsilon$ на величину енергії $(\Delta\varepsilon)^2 / (2mc^2)$, яку виносить ядро віддачі.

В умовах жорсткого зв'язку ядра з кристалічною ґраткою остання не отримує енергії (бо її маса $M \gg m$ дуже велика), і квант виносить усю енергію, $\hbar\omega = \Delta\varepsilon$.

Приклад 3.4. Частинка, маса якої m_1 і енергія ε_0 зазнає пружного зіткнення з нерухомою частинкою, маса якої m_2 . Виразити кути зіткнення ϑ_1 , ϑ_2 частинок у лабораторній системі відліку через їх енергії ε_1 , ε_2 після зіткнення.

Розв'язання. За законом збереження чотиривимірного імпульсу

$$p_1^{i(0)} + p_2^{i(0)} = p_1^i + p_2^i. \quad (3.1)$$

Щоб визначити кут розсіювання першої частинки, перенесемо p_{1i} в ліву частину рівняння (3.1) та піднесемо до квадрата обидві частини:

$$p_1^{i(0)2} + p_2^{i(0)2} + p_1^{i2} + 2p_1^{i(0)} p_2^{i(0)} - 2p_1^{i(0)} p_1^i - 2p_2^{i(0)} p_1^i = p_2^{i2}.$$

Як відомо $p_1^{i(0)^2} = p_1^{i2} = m_1^2 c^2$, $p_2^{i(0)^2} = p_2^{i2} = m_2^2 c^2$. Скалярні добутки перетворюються таким чином ($\vec{p}_2^{(0)} = 0$):

$$\begin{aligned} -p_1^{i(0)} p_2^{i(0)} &= \vec{p}_1^{(0)} \cdot \vec{p}_2^{(0)} - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_2^{(0)} = -\varepsilon_0 m_2, \quad p_2^{i(0)} p_1^i = m_2 \varepsilon_1, \\ -p_1^{i(0)} p_1^i &= \vec{p}_1^{(0)} \cdot \vec{p}_1 - \frac{1}{c^2} \varepsilon_1^{(0)} \varepsilon_1 = p_0 p_1 \cos \vartheta_1 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{c^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де $p_0 = \frac{1}{c^2} \sqrt{\varepsilon_0^2 - m_1^2 c^4}$.

Підставляючи вирази у рівність (3.2), знайдемо

$$\cos \vartheta_1 = \frac{\varepsilon_1 (\varepsilon_0 + m_2 c^2) - \varepsilon_0 m_2 c^2 - m_1^2 c^4}{c^2 p_0 p_1}.$$

Аналогічно

$$\cos \vartheta_2 = \frac{(\varepsilon_0 + m_2 c^2)(\varepsilon_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_0 p_1}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Знайти закон перетворення енергії і компонентів імпульсу частинки при переході до системи, що рухається зі швидкістю v відносно початкової системи.

3.2. Виразити імпульс p релятивістської частинки через її кінетичну енергію T . Виразити швидкість v частинки через її імпульс p .

Відповідь. $p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}$; $v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$.

3.3. Частинка з масою m має енергію ε . Знайти швидкість v частинки. Розглянути, зокрема, нерелятивістський та ультрарелятивістський випадки.

Відповідь. $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\varepsilon_0/\varepsilon)^2}$, $\varepsilon_0 = mc^2$.

У нерелятивістському випадку $\beta \approx \sqrt{2T/\varepsilon_0}$, в ультрарелятивістському $\beta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)^2$.

3.4. Знайти наближені вирази для кінетичної енергії T частинки, мас якої m : а) через її швидкість v і б) через її імпульс p з точністю до v^4/c^4 і p^4/m^4c^4 відповідно, якщо $v \ll c$.

Відповідь. а) $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots$, б) $T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + \dots$

3.5. Знайти швидкість v частинки, маса якої m і заряд e , що має прискорювальну різницю потенціалів V (початкова швидкість дорівнює нулю). Спростити загальну формулу для нерелятивістського та ультрарелятивістського випадків (урахувати по два члени розкладання).

Відповідь. $v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{1 + \frac{eV}{2mc^2}}{\left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^2}}$.

У випадку $eV \ll mc^2$ швидкість $v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{eV}{mc^2}\right)} \ll c$.

У випадку $eV \gg mc^2$ швидкість $v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \approx c$.

3.6. Прискорювач створює на виході пучок заряджених частинок з кінетичною енергією T ; сила струму в пучку дорівнює I . Знайти тиск F пучка на поглинальну поверхню та потужність W , що виділяється на поверхні. Маса частинки m , заряд e .

Відповідь. $F = \frac{I}{ce} \sqrt{T(T + 2mc^2)}$, $W = \frac{I}{e} T$.

3.7. Деяке тіло рухається з релятивістською швидкістю v через газ, в одиниці об'єму якого міститься N частинок масою m , що повільно рухаються. Знайти тиск p , створюваний газом на елемент поверхні тіла, який розташований нормально до його швидкості, якщо частинки пружно відбиваються від поверхні тіла.

Відповідь. $p = \frac{2mv^2N}{1-v^2/c^2}$.

3.8. Система відліку S' рухається зі швидкістю \vec{V} відносно системи S . Частинка масою m , що має в S' енергію ε' і швидкість \vec{v}' , рухається під кутом ϑ' до напрямку \vec{V} . Знайти кут ϑ між імпульсом \vec{p} частинки і напрямком \vec{V} у системі S . Виразити енергію та імпульс частинки в S через ϑ' , ε' або ϑ' , v' .

Відповідь. $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\gamma} \frac{p' \sin \vartheta'}{p' \cos \vartheta' + V \frac{\varepsilon'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{V}{v'}}$,

де $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$; $\varepsilon = \gamma(\varepsilon' + p'V \cos \vartheta')$, p , p' — імпульси частинки

в системах S і S' відповідно.

Зведеною в умові приближеною формулою для ультрарелятивістського випадку можна користуватися, якщо $\cos \frac{\vartheta'}{2} \gg \sqrt{1 - \frac{V}{v'}}$,

де $v' = p' \frac{c^2}{\varepsilon'}$ — швидкість частинки у S' . Енергія в ультрарелятивістському випадку набуває вигляду

$$\varepsilon \approx pc \approx 2\gamma\varepsilon' \cos^2 \frac{\vartheta'}{2}.$$

3.9. π^0 -мезон рухається зі швидкістю v і розпадається на два γ -кванти. Знайти кутовий розподіл γ -квантів розпаду $dW/d\Omega$ у лабораторній системі відліку, зважаючи на те, що в системі спокою π^0 -мезона розподіл γ -квантів розпаду сферично симетричний.

Відповідь. $dW = \frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2(1-\beta \cos \vartheta)^2}$; $\int dW = 1$, де $\beta = v/c$.

3.10. Визначити масу m деякої частинки, яка розпадається на дві частинки, маси яких m_1 , m_2 . З досліду відомі величини імпульсів p_1 , p_2 частинок, що утворилися внаслідок розпаду, і кут θ між напрямками їх швидкостей.

Відповідь.

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2 \left[\sqrt{(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)} - p_1 p_2 \cos \vartheta \right], c = 1.$$

3.11. Визначити масу m_1 деякої частинки, яка являє собою одну з двох частинок, що утворилися внаслідок розпаду частинки, маса якої m і імпульс p . Імпульс p_2 , маса m_2 і кут θ_2 вильоту другої частинки, що утворилася під час розпаду, також відомі.

Відповідь.

$$m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2 \left[\sqrt{(p^2 + m^2)(p_2^2 + m_2^2)} - p p_2 \cos \vartheta_2 \right], c = 1.$$

3.12. Частинка, маса якої m_1 і швидкість v , зіштовхується з нерухомою частинкою масою m_2 і поглинається нею. Знайти масу m і швидкість V утвореної частинки.

Відповідь.

$$m^2 = \varepsilon^2 - p^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1 m_2}{\sqrt{1-v^2}}, \quad V = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2 \sqrt{1-v^2}}, \quad c = 1.$$

3.13. Частинка масою m_1 налітає на нерухому частинку, маса якої m_2 . Відбувається реакція, у якій народжується ряд частинок, загальна маса яких M . Якщо $m_1 + m_2 < M$, то за малих кінетичних енергій першої частинки, що рухалась, реакція не відбувається, — вона суперечить закону збереження енергії. Знайти мінімальне значення кінетичної енергії першої частинки, (енергетичний поріг реакції T_0), починаючи з якого реакція стає енергетично можливою.

Відповідь. $T_0 = \frac{c^2}{2m_1} (M - m_1 - m_2)(M + m_1 + m_2)$.

3.14. Показати, що анігіляція електронно-позитронної пари з випромінюванням одного фотона суперечить закону збереження енергії-імпульсу.

3.15. Частинка з енергією ε і масою m_1 налітає на частинку масою m_2 , що перебувала в стані спокою. Знайти швидкість центра інерції частинок відносно лабораторної системи відліку за такого зіткнення.

Відповідь. $v = \frac{c\sqrt{\varepsilon^2 - m_1^2 c^4}}{\varepsilon + m_2 c^2}$.

3.16. Частинка масою M розпадається на дві частинки, маси яких m_1 і m_2 . Знайти енергію утворених частинок у системі їх центра інерції.

3.17. Частинка, що рухалася зі швидкістю v , розпадається на дві частинки, енергії яких у системі центра інерції дорівнюють E_1 і E_2 . Знайти зв'язок між кутом, під яким розлітаються частинки, та енергіями частинок у лабораторній системі.

3.18. Ультрарелятивістська частинка, маса якої m і енергія ε_0 , пружно розсіюється на нерухомому ядрі, маса якого $M \gg m$. Визначити залежність кінцевої енергії ε частинки від кута ϑ її розсіювання.

Відповідь. $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}$.

3.19. Визначити залежність частоти фотона, розсіяного на електроні, що перебуває в стані спокою, від кута розсіювання (ефект Комптона).

3.20. Довести, що випромінювання і поглинання світла вільним електроном у вакуумі неможливе.

3.2. Рух заряджених частинок в електромагнітному полі

У електромагнітному полі \vec{E}, \vec{H} на точкову частинку із зарядом e , яка рухається зі швидкістю \vec{v} , діє сила Лоренца:

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H}.$$

За одиницю часу кінетична енергія частинки змінюється на величину

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = e\vec{E} \cdot \vec{v} = \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

де ε — енергія частинки.

Магнітне поле не виконує роботи над частинкою, оскільки магнітна сила перпендикулярна до швидкості частинки. Із величин \vec{F} і $\frac{d\varepsilon}{dt}$ можна побудувати чотиривимірний вектор (вектор сили Мінковського):

$$F^i = \left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right).$$

Чотиривимірна сила виражається через тензор електромагнітного поля F^{ik} : $F^i = \frac{e}{c} F^{ik} u_k$, де u^k — чотиривимірна швидкість частинки.

Диференціальні рівняння руху частинки в чотиривимірному записі мають вигляд

$$\frac{dp^i}{d\tau} = eF^i \text{ або } mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k. \quad (3.2)$$

Проектуючи ці рівняння на просторові та часову осі, отримуємо рівняння руху частинки в тривимірній формі і закон збереження енергії:

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{H}, \quad T = e\vec{v} \cdot \vec{E}.$$

Тут $T = \varepsilon - mc^2$ — кінетична енергія частинки; \vec{p} — її імпульс, точкою позначено диференціювання за часом t .

Функція Лагранжа зарядженої частинки в електромагнітному полі з потенціалами φ, \vec{A} має вигляд:

– у релятивістському випадку

$$L = -mc\sqrt{1-v^2/c^2} - U;$$

– у нерелятивістському випадку

$$L = \frac{mv^2}{2} - U,$$

де

$$U = -\frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + e\varphi.$$

Величина U відіграє роль потенціальної енергії взаємодії частинки із зовнішнім полем. Рівняння руху частинки можна записати у формі Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i},$$

де q^i, \dot{q}^i — узагальнені координати і швидкості.

Струм, що виникає під час обертального (орбітального) руху точкової зарядженої частинки навколо деякого центра, характеризується магнітним моментом

$$\vec{m} = \kappa \vec{L}, \quad (3.3)$$

де $\kappa = e/2mc$ — гіромагнітне відношення; m — маса частинки; $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ — її момент імпульсу.

В зовнішньому магнітному полі \vec{H} на частинку діє обертальний момент $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{H}$, під дією якого момент імпульсу \vec{L} змінюється з часом за законом $d\vec{L}/dt = \vec{N}$. Відповідно до виразу (3.3) залежність магнітного моменту від часу визначається рівнянням

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \kappa \vec{m} \times \vec{H}. \quad (3.4)$$

Крім механічного і магнітного моментів, пов'язаних з орбітальним рухом, мікрочастинки мають також власний (спіновий) механічний \vec{s} і магнітний \vec{m}_0 моменти, які напрямлені паралельно або антипаралельно:

$$\vec{m}_0 = \kappa_0 \vec{s}.$$

Для електрона $\kappa_0 = e/mc < 0$, де e — заряд електрона; m — його маса. Зміна з часом моменту \vec{m}_0 описується рівнянням (3.4), у якому κ замінюється на κ_0 і \vec{m} на \vec{m}_0 .

Нейтрон не має електричного заряду, проте має спіновий момент \vec{m}_0 . Цей момент завдяки квантовим ефектам може орієнтуватися в зовнішньому магнітному полі $\vec{H}(\vec{r})$ двома способами: у напрямі поля або від нього, причому початкова орієнтація зберігається, якщо виконуються певні умови. У цьому випадку рух нейтронів

із магнітним моментом, орієнтованим у напрямі поля або від нього, можна розглядати як рух класичних частинок у силовому полі з потенціальною енергією

$$U = \mp m_0 H,$$

де $H = |\vec{H}(\vec{r})|$.

Енергія U зазвичай дуже мала, тому магнітне поле впливає здебільшого лише на рух дуже повільних («холодних») нейтронів.

* * *

Приклад 3.5. Частинка із зарядом e та масою m рухається з довільною швидкістю в однорідному постійному електричному полі \vec{E} . У початковий момент часу $t = 0$ частинка перебувала в початку координат і мала імпульс \vec{p}_0 . Визначити тривимірні координати та час t частинки в лабораторній системі залежно від її власного часу τ . Вилучивши τ , подати тривимірні координати частинки залежно від t . Розглянути, зокрема, нерелятивістський та ультрарелятивістський випадки.

Розв'язання. Оберемо вісь $x \parallel e\vec{E}$. Диференціальні рівняння руху в чотиривимірній формі мають у розгляданому випадку вигляд:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{|e|E}{mc} \frac{d(ct)}{d\tau}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2(ct)}{d\tau^2} = \frac{|e|E}{mc} \frac{dx}{d\tau}.$$

Інтегруючи цю систему з початковими умовами:

$$x = y = z = ct = 0, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p_{0x}}{m}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{p_{0y}}{m},$$

$$\frac{dz}{d\tau} = 0, \quad c \frac{dt}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0}{mc}, \quad \text{якщо } \tau = 0, \quad \text{де } \varepsilon_0 = \sqrt{c^2 p_0^2 + m^2 c^4},$$

знаходимо параметричні рівняння траєкторії частинки в чотиривимірному просторі:

$$x = \frac{\varepsilon_0}{|e|E} \left(\operatorname{ch} \frac{|e|E\tau}{mc} - 1 \right) + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \operatorname{sh} \frac{|e|E\tau}{mc},$$

$$y = \frac{p_{0y}\tau}{m}, \quad z = 0,$$

$$ct = \frac{\varepsilon_0}{|e|E} \operatorname{sh} \frac{|e|E\tau}{mc} + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \left(\operatorname{ch} \frac{|e|E\tau}{mc} - 1 \right). \quad (3.5)$$

Із рівняння (3.5) знаходимо:

$$\tau = \frac{mc}{|e|E} \ln \frac{p_{0x} + |e|Et + \sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \varepsilon_0/c}. \quad (3.6)$$

Використовуючи вираз (3.6) та вилучивши sh і ch з рівнянь (3.5) і (3.6), отримуємо закон руху в тривимірній формі:

$$x(t) = \frac{c}{|e|E} \left[\sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2} - \frac{\varepsilon_0}{c} \right];$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{|e|E} \ln \frac{p_{0x} + |e|Et + \sqrt{(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \varepsilon_0/c};$$

$$z(t) = 0.$$

Якщо $p_0 \ll mc$ і $t \ll \frac{mc}{|e|E}$, рух нерелятивістський.

Вирази для x , y , z переходять при цьому в звичайні нерелятивістські формули рівноприскореного руху:

$$x(t) = \frac{p_{0x}}{m} t + \frac{|e|E}{2m} t^2; \quad y(t) = \frac{p_{0y}}{m} t.$$

Після закінчення досить великого часу з моменту початку руху $\left(t \gg \frac{mc}{|e|E} \right)$ швидкість частинки наближається до c (навіть якщо вона була малою на початку). При цьому

$$x(t) = ct - \frac{mc^2}{|e|E}, \quad y(t) = \frac{cp_{0y}}{|e|E} \ln \frac{2|e|Et}{mc}$$

і рух стає рівномірним (зі швидкістю c). Рух, який відбувається при $p_{0y} = 0$, називають *гіперболічним*.

Приклад 3.6. Знайти диференціальні рівняння руху релятивістської частинки в електромагнітному полі, виходячи з функції Лагранжа в циліндричних координатах.

Указівка. Обчислюючи похідну за часом у рівняннях Лагранжа, треба враховувати, що ця похідна береться вздовж траєкторії частинки так, що r , α , z мають розглядатися як функції часу.

Розв'язання.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + eEr + \frac{e}{c} (-H_\alpha \dot{z} + H_z r \dot{\alpha}); \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left[E_\alpha + \frac{1}{c} (H_r \dot{z} - H_z \dot{r}) \right] r; \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left[E_z + \frac{1}{c} (H_\alpha \dot{r} + H_r r \dot{\alpha}) \right]. \quad (3.9)$$

Рівняння (3.7) і (3.9) мають вигляд звичайних рівнянь руху (але зі змінною масою $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$). При цьому у правій частині

рівняння (3.7) наявний член $\frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, який не залежить від

вигляду електромагнітних сил (відцентрова сила). Рівняння (3.9) виражає похідну за часом від моменту імпульсу частинки відносно осі z через z -складову моменту сили Лоренца.

Задачі для самостійного розв'язання

3.21. Записати релятивістське рівняння руху частинки під дією сили \vec{F} . Імпульс виразити через швидкість \vec{v} частинки. Розглянути випадки, коли швидкість а) змінюється тільки за величиною; б) змінюється тільки за напрямком; в) $v \ll c$.

Відповідь. $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{mv\vec{v}}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \vec{F};$

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{mv\vec{v}}{c^2(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \vec{F};$$

а) $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, якщо $\vec{v} \parallel \vec{F}$;

б) $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$, якщо $\vec{v} \perp \vec{F}$;

в) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$.

Величини $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}$ і $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$ інколи називають по-здовжніми і поперечними масами відповідно.

3.22. Записати вираз, що пов'язує вектори сил, які діють на частинку в лабораторній системі \vec{F} і в системі \vec{F}' , у якій частинка перебуває у стані спокою. Швидкість частинки \vec{v} .

Відповідь.

$$\vec{F} = \frac{1}{\gamma} \vec{F}' + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}') \vec{v}}{v^2}; \quad \vec{F}' = \gamma \vec{F} - (\gamma - 1) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{v}}{v^2},$$

де $\gamma = \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$.

3.23. Яка сила діє з точки спостереження в миттєво супутній системі на тіло маси m , що перебуває в ракеті і нерухоме відносно неї, якщо ракета рухається з релятивістською швидкістю v по коловій орбіті радіуса R .

Відповідь. $F = \gamma^2 \frac{mv^2}{R}$.

3.24. Знайти траєкторію руху зарядженої частинки в однорідному електричному полі з напруженістю \vec{E} . Розглянути граничний випадок малих швидкостей.

3.25. Визначити пробіг l релятивістської зарядженої частинки, що має заряд e , масу m і початкову енергію ε , в однорідному сповільнювальному електричному полі, паралельному початковій швидкості частинки.

Відповідь. $l = \frac{\varepsilon - mc^2}{eE}$.

3.26. Визначити закон і траєкторію руху зарядженої частинки в однорідному магнітному полі з напруженістю \vec{H} , якщо в початковий момент часу частинка перебувала в точці з радіусом-вектором \vec{r}_0 і мала імпульс \vec{p}_0 .

3.27. Нерелятивістська частинка із зарядом e і масою m рухається у перпендикулярних однорідних постійних електричному $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$ і магнітному $\vec{H} = (0, 0, H)$ полях. У початковий момент часу частинка перебувала в початку координат і мала швидкість $\vec{v} = (v_{0x}, 0, v_{0z})$. Зобразити залежності $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, намалювати можливі траєкторії частинки.

Указівка. Для спрощення інтегрування ввести змінну $u = x + iy$.

3.28. Релятивістська частинка рухається в паралельних однорідних постійних електричному \vec{E} і магнітному \vec{H} полях ($\vec{E} \parallel \vec{H} \parallel z$). Якщо $t = 0$, частинка перебувала в початку координат і мала імпульс $\vec{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Визначити залежність x, y, z, t від власного часу частинки τ .

Відповідь.

$$x = \frac{p_{0x}c}{eH} \sin kH\tau + \frac{p_{0y}c}{eH} (\cos kH\tau - 1);$$

$$y = \frac{p_{0x}c}{eH} (\cos kH\tau - 1) + \frac{p_{0y}c}{eH} \sin kH\tau;$$

$$z = \frac{\varepsilon_0}{eH} (\operatorname{ch} kE\tau - 1) + \frac{p_{0z}c}{eH} \operatorname{sh} kE\tau;$$

$$ct = \frac{p_{0z}c}{eE} (\operatorname{ch} kE\tau - 1) + \frac{\varepsilon_0}{eE} \operatorname{sh} kE\tau,$$

де $k = e/mc$.

3.29. Визначити закон руху частинки у взаємно перпендикулярних однорідних постійних електричному \vec{E} та магнітному \vec{H} полях. Виконати це двома способами: а) використовуючи перетворення Лоренца і вважаючи відомим рух частинки тільки в електричному або тільки в магнітному полі, та б) інтегруючи рівняння (3.2).

3.30. Знайти диференціальні рівняння руху релятивістської частинки в електромагнітному полі, виходячи з функції Лагранжа в циліндричних координатах.

Відповідь.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \frac{mr\dot{a}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + eE_r + \frac{e}{c} (-H_a \dot{z} + H_z r \dot{a}); \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2 \dot{a}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left[E_a + \frac{1}{c} (H_r \dot{z} - H_z \dot{r}) \right] r; \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = e \left[E_z + \frac{1}{c} (H_a \dot{r} - H_r r \dot{a}) \right].$$

Рівняння (3.10) має вигляд звичайних рівнянь руху Ньютона (але зі змінною масою $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$). При цьому в правій частині

цього рівняння міститься член $\frac{mr\dot{a}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, що не залежить від виду

електромагнітних сил (центробіжна сила). Рівняння (3.11) виражає похідну за часом від моменту імпульсу частинки відносно осі z через z -складову моменту сили Лоренца.

3.31. Довгий прямий циліндричний катод радіуса a , по якому тече рівномірно розподілений струм I , випромінює електрони з нульовою початковою швидкістю. Ці електрони рухаються під дією прискорювального потенціалу U до довгого коаксіального з катодом анода, що має радіус b . Яке має бути мінімальне значення різниці потенціалів $U_{кр}$ між катодом і анодом, щоб електрони досягли анода, незважаючи на дію магнітного поля струму I ?

Відповідь. Різниця потенціалів U повинна бути більшою, ніж

$$U_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{4I^2}{c^2} \ln^2 \frac{b}{a} + \frac{m^2 c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{|e|}.$$

При $|e|U \ll mc^2$ (нерелятивістські електрони), отримуємо із загальної формули: $U_{\text{кр}} = \frac{2I^2 |e|}{mc^4} \ln^2 \frac{b}{a}$.

3.32. По нескінченно довгому прямому циліндричному провіднику радіуса a тече струм I . З поверхні провідника зривається електрон, початкова швидкість v_0 якого напрямлена паралельно провіднику. Знайти найбільшу відстань b , на яку електрон може віддалитися від осі провідника.

Відповідь. $b = a \exp \frac{p_0 c^2}{I |e|}$, де $p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$.

Розділ 4

ПОСТІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНЕ І МАГНІТНЕ ПОЛЯ У ВАКУУМІ

4.1. Постійне електричне поле у вакуумі

У цьому розділі наведено задачі на визначення потенціалу $\varphi(\vec{r})$ і напруженості поля $\vec{E}(\vec{r})$ за заданим розподілом зарядів, що характеризується об'ємною $\rho(\vec{r})$, поверхневою $\sigma(\vec{r})$ або лінійною $k(\vec{r})$ густиною. Розподіл точкових зарядів може бути описаний об'ємною густиною $\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$, де q_i — величина i -го заряду, \vec{r}_i — радіус-вектор i -го заряду; $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ — δ -функція. Напруженість електричного поля задовольняє рівняння Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (4.1)$$

Часто використовується інтегральна форма першого з рівнянь (4.1) (електростатична теорема Гаусса):

$$\oint_S E_n df = 4\pi q, \quad (4.2)$$

де f — деяка замкнена поверхня; q — повний заряд усередині цієї поверхні.

Напруженість і потенціал електричного поля пов'язані співвідношеннями:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \varphi(\vec{r}_0) = 0. \quad (4.3)$$

Потенціал φ задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Потенціал неперервний і скінченний в усіх точках простору, у яких немає точкових зарядів, зокрема, на зарядженій поверхні. Нормальні похідні φ зазнають розриву на зарядженій поверхні:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \quad \text{або} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma.$$

Нормаль напрямлена з області 1 в область 2.

На поверхні подвійного електричного шару з потужністю τ

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau$$

(нормаль \vec{n} напрямлена від негативно зарядженої поверхні шару до позитивно зарядженої).

Принцип суперпозиції дозволяє з потенціалів елементарних зарядів знаходити шляхом підсумовування потенціали складних систем зарядів

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}. \quad (4.4)$$

У випадку поверхневого або лінійного розподілу зарядів об'ємний інтеграл у виразі (4.4) замінюється відповідним поверхневим або лінійним інтегралом, а у випадку системи точкових зарядів — сумою інтегралів за зарядами. Це зауваження стосується також усіх наведених нижче формул, у яких наявні інтеграли за розподілом зарядів.

У більшості випадків важко безпосередньо обчислювати інтеграл (4.4). У зв'язку з цим потенціал часто записують у вигляді ряду, що утворюється в результаті розкладання підінтегрального виразу за степенями x/r або x'/r , і почленного його інтегрування. Таке розкладання можна отримати як у декартових, так і в сферичних координатах.

Декартові координати. Якщо $r > a$ (a — найбільша відстань зарядів системи від полюса O), тоді

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{r} - p_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{1}{r} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r} - \frac{Q_{\alpha\beta\gamma}}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{1}{r} \dots \quad (4.5)$$

Мультипольні моменти q , p_α , $Q_{\alpha\beta}$ виражаються об'ємними інтегралами:

$$q = \int \rho(\vec{r}') dV' - \text{повний заряд системи};$$

$p_\alpha = \int \rho(\vec{r}') x'_\alpha dV'$ – компоненти дипольного моменту;

$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec{r}') x'_\alpha x'_\beta dV'$ – компоненти квадрупольного моменту.

Величини q , p_α , $Q_{\alpha\beta}$... при повороті системи координат перетворюються відповідно як скаляр, вектор, тензор другого рангу і т. д. Другий і третій члени потенціалу (4.5) можна записати у формі

$$\varphi^{(p)} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

де $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ — вектор дипольного моменту системи;

$$\begin{aligned} \varphi^{(Q)} = \frac{1}{2r^5} & \left[(3x^2 - r^2)Q_{xx} + (3y^2 - r^2)Q_{yy} + (3z^2 - r^2)Q_{zz} + \right. \\ & \left. + 6xyQ_{xy} + 6xzQ_{xz} + 6yzQ_{yz} \right]. \end{aligned}$$

Сферичні координати. Використаємо розкладання $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, підставивши його у вираз (4.4). Отримаємо, якщо $r > r'$:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}}, \quad (r > r'),$$

де Q_{lm} — мультипольний момент порядку l, m ;

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\vec{r}') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'.$$

Якщо $r' > r$, то r і r' міняються місцями, і

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Q'_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad (r < r'),$$

де

$$Q'_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'.$$

Якщо точка спостереження \vec{r} міститься всередині розподілу зарядів, то потрібно розбити область інтегрування у виразі (4.4) на

дві частини сферою радіуса r з центром у полюсі O . Для інтегрування за областю всередині сфери потрібно користуватися розкладанням за $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$, а в разі інтегрування за зовнішньою областю — формулою розкладання із заміною r на r' .

Енергію електростатичного поля можна обчислити за однією із формул:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad W = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV \quad (4.6)$$

(ці формули еквівалентні, якщо заряди зосереджені в скінченній області простору, а інтегрування поширюється на весь простір).

Енергія взаємодії двох систем зарядів 1 і 2 визначається за виразами:

$$U = \int \rho_1(\vec{r}) \phi_2(\vec{r}) dV = \int \frac{\rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_1 dV_2.$$

Узагальнені пондеромоторні сили можна отримати диференціюванням U або W за відповідними узагальненими координатами a_i :

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i} \quad \text{або} \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial a_i}.$$

Узагальнена сила додатна, якщо вона збільшує відповідну координату.

* * *

Приклад 4.1. Знайти потенціал і напруженість електричного поля всередині і зовні рівномірно зарядженого циліндра радіуса R . Заряд одиниці довжини циліндра дорівнює χ .

Розв'язання. Найпростіший метод розв'язання — за допомогою електростатичної теореми Гаусса.

Для інтегрування рівняння Пуассона необхідно скористатися виразом оператора Лапласа в циліндричній системі координат і використати той факт, що внаслідок симетрії системи ϕ залежить тільки від r .

Використаємо теорему Гаусса (4.2).

Оберемо всередині заданого циліндра поверхню у вигляді коаксіального циліндра радіуса r і висотою h . Потік вектора напруженості через таку поверхню буде становити:

$$\oint_S E_n df = E_1 \cdot 2\pi rh.$$

Якщо циліндр рівномірно заряджений по об'єму, то всередині гауссової поверхні міститиметься заряд, що дорівнює добутку об'ємної густини заряду на об'єм гауссового циліндра, тобто

$$q = \rho \pi r^2 h = \frac{Q}{\pi R^2 l} \pi r^2 h = \chi h \frac{r^2}{R^2}$$

(тут враховано лінійну густину заряду $\chi = \frac{Q}{l}$).

Тоді за теоремою Гаусса $2\pi rhE_1 = 4\pi\chi h \frac{r^2}{R^2}$, звідки $E_1 = \frac{2\chi r}{R^2}$

— електричне поле всередині циліндра.

Із співвідношень (4.3) знайдемо потенціал:

$$\varphi_1 = -\int \frac{2\chi r}{R^2} dr = -\frac{\chi r^2}{R^2} + C_1,$$

причому оберемо на поверхні циліндра, тобто якщо $r = R$, потенціал, що дорівнює нулю, звідки константа $C_1 = \chi$.

Остаточно отримаємо:

$$\varphi_1 = -\frac{\chi r^2}{R^2} + \chi = \chi \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (r \leq R).$$

Тепер розглянемо гауссову поверхню зовні циліндра. У середину її потрапить частина заряду:

$$q = \rho \pi R^2 h = \frac{Q}{\pi R^2 l} \pi R^2 h = \chi h.$$

За теоремою Гаусса: $2\pi rhE_2 = 4\pi\chi h$, звідки

$$E_2 = \frac{2\chi}{r}.$$

Потенціал зовні циліндра буде мати вираз:

$$\varphi_2 = -\int \frac{2\chi}{r} dr = -2\chi \ln r + C_2.$$

Константу інтегрування знову визначимо із рівності потенціала нулю на поверхні циліндра: якщо $r = R$, $C_2 = 2\chi \ln R$.

Отже,

$$\varphi_2 = -2\chi \ln r + 2\chi \ln R = 2\chi \ln \frac{R}{r} \quad (r \geq R).$$

У випадку поверхневого розподілу заряду по циліндру

$$E_1 = 0, \quad \varphi_1 = C_1 = 0, \quad (r \leq R),$$

а значення електричного поля і потенціала зовні циліндра ($r \geq R$) збігаються зі значеннями для об'ємного розподілу заряду.

Приклад 4.2. Заряд розподілений сферично симетричним чином: $\rho = \rho(r)$. Розбивши розподіл заряду на сферичні шари, виразити через $\rho(r)$ потенціал φ і напруженість поля \vec{E} (записати φ і \vec{E} у вигляді однократного інтеграла за r).

Розв'язання. Розділимо весь заряд на концентричні нескінченно тонкі шари товщиною dr' , які містяться на відстані r' від центра симетрії (рис. 4.1). Розрахуємо спочатку напруженість поля δE і потенціал $\delta\varphi$, що створюються таким шаром у деякій точці r простору, а потім проінтегруємо отримані вирази за всіма такими шарами.

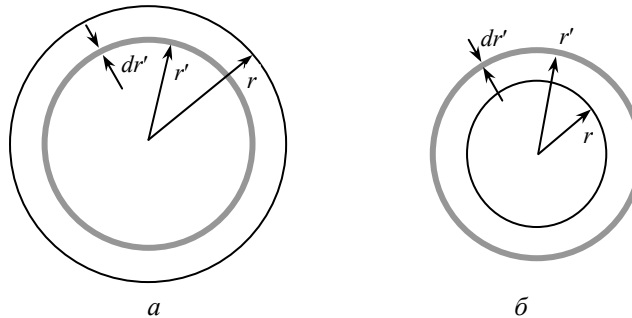


Рис. 4.1

Якщо точка r міститься зовні зарядженого шару (рис. 4.1, а), то, користуючись відповідним рівнянням Максвелла в інтегральному вигляді, отримаємо значення напруженості поля (позначимо його через δE_1):

$$\int \overline{\delta E_1} \cdot \overline{df} = 4\pi \int \rho dV .$$

Відзначимо, що символ δ використовуємо лише для того, щоб відрізнити, за якою змінною відбувається інтегрування, хоча насправді $\delta E_1 \equiv dE_1$.

Як поверхня інтегрування береться сфера радіуса r , оскільки внаслідок симетрії задачі в кожній точці цієї сфери поле буде однаковим, а тому значення δE_1 можна винести за знак інтеграла. Крім того, вектори $\overline{\delta E_1}$ та \overline{df} співнаправлені, отже $\overline{\delta E_1} \cdot \overline{df} = \delta E_1 \cdot df$.

У правій частині рівняння $\int \rho dV$ — це весь заряд, що міститься всередині сфери радіуса r , тобто заряд шару, який дорівнює $\rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr'$ (оскільки шар вважається нескінченно тонким, можна вважати, що в ньому $\rho(r') = \text{const}$). Таким чином, маємо:

$$\delta E_1 \int df = 4\pi \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr';$$

$$\delta E_1 \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \rho(r') \cdot 4\pi r'^2 dr';$$

$$\delta E_1(r) = \frac{4\pi}{r^2} \rho(r') r'^2 dr'.$$

Для розрахунку відповідного потенціалу скористаємось співвідношенням

$$\overline{\delta E} = -\nabla \delta \phi ,$$

тобто

$$\begin{aligned} \delta \phi_1(r) &= -\int \overline{\delta E_1} \cdot \overline{dr} = -\int \delta E_1 \cdot dr = \\ &= -4\pi \rho(r') r'^2 dr' \int \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi}{r} \rho(r') r'^2 dr' + C_1. \end{aligned}$$

Константу C_1 виберемо з урахуванням природної граничної умови $\delta\varphi_1|_{\infty} = 0$, звідки $C_1 = 0$. Отже,

$$\delta\varphi_1(r) = \frac{4\pi}{r} \rho(r') r'^2 dr'.$$

Тепер розрахуємо поле (позначимо його через δE_2), якщо точка спостереження r міститься всередині зарядженого шару (рис. 4.1, б). Оскільки всередині поверхні інтегрування тепер заряду немає, права частина в рівнянні Максвелла дорівнюватиме нулю, а отже, і поле

$$\delta E_2 = 0.$$

Відповідний потенціал у цій області в такому разі дорівнює константі:

$$\delta\varphi_2(r) = C_2.$$

Константу C_2 виберемо з умови зшивання потенціалу на межі областей, тобто

$$\delta\varphi_2(r') = \delta\varphi_1(r'),$$

звідки

$$C_2 = 4\pi\rho(r')r'dr',$$

а отже і

$$\delta\varphi_2 = 4\pi\rho(r')r'dr'.$$

Тепер, коли вирази для поля та потенціалів знайдено, залишилося проінтегрувати їх за всіма значеннями r' . Слід пам'ятати, що в кожній точці r повне поле складається як із шарів, розміщених відносно точки спостереження ближче до центра симетрії (для врахування цієї складової в потенціалі потрібно проінтегрувати $\delta\varphi_1$ за r' від нуля до r), так і тих, що містяться далі, ніж на відстані r (їх урахуємо, інтегруючи $\delta\varphi_2$ по r' від r до нескінченності). Таким чином, отримуємо повний потенціал:

$$\varphi(r) = \int_0^r \delta\varphi_1(r') + \int_r^{\infty} \delta\varphi_2(r') = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^{\infty} \rho(r') r' dr'.$$

Відповідно, напруженість поля

$$E = \int_0^r \delta E_1(r') = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr',$$

або, з урахуванням напрямку поля

$$\vec{E} = \frac{4\pi\vec{r}}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'.$$

Приклад 4.3. Знайти силу \vec{F} і обертальний момент \vec{N} , прикладені до електричного диполя з моментом \vec{p} у полі точкового заряду q .

Розв'язання. Якщо розглядати диполь як систему зарядів, що міститься у зовнішньому полі, яке створює заряд q , то вираз для повної сили, що діє на таку систему, з точністю до лінійних членів записується у вигляді

$$\vec{F} = \vec{E}_0 \sum e_\alpha + \left(\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \right)_0.$$

Перший член цього виразу дорівнює нулю, оскільки це сума зарядів диполя. Тоді $\vec{F} = (\vec{p} \nabla) \vec{E}$.

Підставляючи вираз для напруженості поля точкового заряду $\vec{E} = \frac{q}{R^3} \vec{R}$ у вираз для сили, дістаємо:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \left\{ \frac{1}{R^3} (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{R} + \vec{R} \left(\vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{R^3} \right) \right\} = \\ &= q \left\{ \frac{\vec{p}}{R^3} - \vec{R} \cdot \frac{3}{R^4} (\vec{p} \cdot \nabla R) \right\} = q \left\{ \frac{\vec{p}}{R^3} - \frac{3\vec{R}(\vec{p} \cdot \vec{R})}{R^5} \right\}, \end{aligned}$$

або з урахуванням $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$:

$$\vec{F} = q \frac{\vec{p} - 3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n})}{R^3}.$$

Сила, що діє на диполь у полі точкового заряду, рівна за абсолютним значенням та протилежна за напрямком силі, що діє на заряд у полі диполя.

Момент сил, що діє на диполь у зовнішньому полі \vec{E} , дорівнює $\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$. Підставляючи сюди вираз для напруженості поля точкового заряду, отримуємо:

$$\vec{N} = q \frac{\vec{p} \times \vec{R}}{R^3}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Нескінченна плоска плита товщиною a рівномірно заряджена по об'єму з густиною ρ . Знайти потенціал ϕ і напруженість \vec{E} електричного поля.

Відповідь. $\phi_1 = -2\pi\rho z^2$, $\vec{E}_1 = 4\pi\rho z\vec{e}_z$ ($|z| < \frac{a}{2}$);

$$\phi_2 = -\frac{1}{2}\pi\rho a(4|z|-a); \quad \vec{E}_2 = 2\pi\rho a \frac{z}{|z|} \vec{e}_z \left(|z| > \frac{a}{2} \right).$$

4.2. Визначити потенціал та напруженість електричного поля всередині і зовні рівномірно зарядженої кулі. Об'ємна густина заряду ρ , радіус кулі R .

Відповідь. $\phi_1(r) = \frac{q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$, $\vec{E}_1 = \frac{q\vec{r}}{R^3} (r \leq R)$;

$$\phi_2(r) = \frac{q}{R}, \quad \vec{E}_2 = \frac{q\vec{r}}{r^3} (r \geq R).$$

4.3. У рівномірно зарядженій кулі з об'ємною густиною заряду ρ є кулеподібна порожнина, центр якої розміщений на відстані a від центра кулі. Знайти напруженість електричного поля всередині порожнини, всередині кулі і зовні кулі. Радіуси кулі та порожнини дорівнюють відповідно R і R' .

Відповідь. а) $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{a}$; б) $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} - \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R'^3}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}(\vec{r}-\vec{a})$;

в) $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\left[\frac{R^3}{r^3}\vec{r} - \frac{R'^3}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}(\vec{r}-\vec{a})\right]$.

4.4. Шар діелектрика, заряджений до об'ємної густини ρ , обмежений двома паралельними площинами. Товщина діелектрика дорівнює d . Знайти напруженості електричного поля всередині і зовні діелектрика.

Відповідь. $\vec{E} = 2\pi\rho d\frac{\vec{z}}{|z|}$ (зовні), $\vec{E} = 4\pi\rho z$ (усередині).

4.5. Визначити енергію електростатичного поля для розподілу заряду відповідно до задачі 4.2 та прикладу 4.1. Обчислення виконати двома способами [див. формули (4.6)].

Відповідь. $W = \frac{3q^2}{5R}$.

4.6. Визначити потенціал, утворюваний електроном атома водню, вважаючи, що заряд електрона в основному стані розподілений

з об'ємною густиною $\rho = \frac{e}{\pi a^3}e^{-2r/a}$, де a — стала.

Відповідь. $\varphi = \frac{e}{r}(1 - e^{-2r/a}) - \frac{e}{a}e^{-2r/a}$.

4.7. Знайти потенціал і напруженість електричного поля на осі плоского кільця, рівномірно зарядженого з поверхневою густиною σ (внутрішній радіус кільця R_1 , зовнішній R_2). Розглянути часткові випадки: а) поле плоского диска ($R_1 \rightarrow 0$); б) поле зарядженої площини ($R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow \infty$).

Відповідь. $\varphi = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2}\right)$,

$$E_x = E_y = 0, E_z = 2\pi\sigma\left(\frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}}\right).$$

Часткові випадки:

$$a) E_z = 2\pi\sigma \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right), \quad \acute{a}) E_z = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|}.$$

4.8. Еліпсоїд із півосями a , b , c рівномірно заряджений по об'єму; повний заряд еліпсоїда q . Знайти потенціал на великих відстанях від такої системи з точністю до квадрупольного члена. Розглянути окремі випадки еліпсоїда обертання з півосями $a = b$ і c , а також кулі ($a = b = c$).

Відповідь.

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5};$$

$$\text{якщо } a = b, \text{ то } \varphi(r, \theta) = \frac{q}{r} + q \frac{c^2 - a^2}{5} \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3};$$

$$\text{якщо } a = b = c, \text{ то } \varphi = \frac{q}{r}.$$

4.9. Обчислити енергію взаємодії електронної хмари атома водню з протоном. Густина заряду електронної хмари взяти із задачі 4.6.

$$\text{Відповідь. } W = \frac{-e^2}{a}.$$

4.10. Обчислити енергію взаємодії двох куль, заряди яких e_1 і e_2 розподілені сферично симетрично. Відстань між центрами куль a , радіуси куль R_1 і R_2 відповідно.

$$\text{Відповідь. } W = \frac{e_1 e_2}{a}.$$

4.11. Диполь з моментом \vec{p}_1 міститься на початку координат, а диполь з моментом \vec{p}_2 — у точці з радіусом-вектором \vec{r} . Знайти енергію взаємодії U цих диполів і діючу між ними силу \vec{F} . За якої орієнтації диполів ця сила буде максимальною?

$$\text{Відповідь. } U = p_1 p_2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^3},$$

де ϑ_1 — кут між r і p_1 ; ϑ_2 — кут між r і p_2 , φ — кут між площинами (r, p_1) і (r, p_2) ,

$$F = 3p_1p_2 \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^4}.$$

4.2. Постійне магнітне поле

Рівняння Максвелла у випадку постійного магнітного поля мають вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (4.7)$$

де \vec{H} — напруженість магнітного поля; \vec{j} — густина об'ємного струму; c — електродинамічна стала (швидкість світла); \vec{B} — магнітна індукція.

В ізотропних діамгнетиках та парамагнетиках \vec{B} і \vec{H} пов'язані співвідношенням

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (4.8)$$

де μ — магнітна проникність речовини (скаляр); у випадку анізотропних речовин μ є тензором другого рангу.

Густина молекулярних струмів $\vec{j}_{\text{мол}}$ у речовині, що перебуває в постійному магнітному полі, виражається через вектор намагніченості \vec{M} (магнітний момент одиниці об'єму) за формулою

$$\vec{j}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (4.9)$$

Вектор \vec{M} пов'язаний з \vec{B} і \vec{H} співвідношенням

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{M}.$$

Основні методи розв'язання задачі про визначення магнітного поля в неферомагнітному середовищі:

Використання закону Біо–Савара. Елемент струму $I d\vec{l}$ створює у вакуумі або в однорідному середовищі магнітне поле

$$d\vec{H} = \frac{I}{cr^3} [d\vec{l} \times \vec{r}]. \quad (4.10)$$

За принципом суперпозиції повне поле в даній точці можна визначити інтегруванням (4.10) за всіма елементами струму (за $d\vec{l}$).

Безпосереднє інтегрування системи рівнянь (4.8), (4.9) з граничними умовами

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \vec{i}, \quad (4.11)$$

де \vec{i} — густина поверхневого струму, нормаль \vec{n} напрямлена з першої області в другу.

Якщо розподіл струмів аксіально симетричний, корисно використовувати інтегральну форму першого з рівнянь (4.7)

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (4.12)$$

Тут інтеграл береться за довільним замкненим контуром; I — повний струм, що протікає через довільну поверхню, яка спирається на цей контур.

Метод векторного потенціалу. Векторний потенціал \vec{A} визначається співвідношенням

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

і додатковою умовою

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

У тих областях, у яких магнетик однорідний, \vec{A} задовольняє рівняння

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}.$$

Граничні умови для векторного потенціалу впливають з граничних умов (4.11) для \vec{B} і \vec{H} .

Векторний потенціал, який утворюється заданим розподілом струмів, можна подати (в однорідному середовищі з магнітною проникністю μ) у вигляді інтеграла за об'ємом, яким протікає струм:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Відповідний вираз для лінійного струму утворюється заміною $\vec{j} dV' \rightarrow Id\vec{l}'$. На великих відстанях від області, якою протікає струм, рівняння (4.12) набуває вигляду

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3},$$

де $\vec{m} = \frac{1}{2c} \int [\vec{r}' \times \vec{j}] dV'$ — магнітний дипольний момент (припускаємо $\mu = 1$).

Метод скалярного потенціалу. У тих областях простору, у яких $\vec{j} = 0$, маємо $\text{rot } \vec{H} = 0$, тому можна вважати

$$\vec{H} = -\text{grad } \psi,$$

де ψ — скалярний потенціал, що задовольняє за $\mu = \text{const}$ рівняння Лапласа.

Проте введений у такий спосіб скалярний потенціал у загальному випадку не буде однозначною функцією точки спостереження.

Енергія магнітного поля, локалізована всередині деякого об'єму V , виражається інтегралом за цим об'ємом:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{H} \cdot \vec{B}) dV. \quad (4.13)$$

Якщо система струмів має кінцеві розміри, її повна енергія може бути обчислена також за формулою

$$W = \frac{1}{2c} \int (\vec{A} \cdot \vec{j}) dV,$$

у якій інтегрування проводиться за об'ємом, яким протікає струм.

Магнітна енергія квазілінійного провідника зі струмом I виражається через коефіцієнт самоіндукції L провідника:

$$W = \frac{LI^2}{2c^2}. \quad (4.14)$$

Індуктивність можна також виразити через подвійний інтеграл за об'ємом провідника:

$$L = \frac{1}{I} \iint \frac{\vec{j}(\vec{r}) \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' .$$

Енергія взаємодії двох провідників зі струмом описується виразами

$$W = \frac{1}{4\pi} \int (\vec{H}_1 \cdot \vec{B}_2) dV = \frac{1}{c} \int (\vec{j}_1 \cdot \vec{A}_2) dV , \quad W_{12} = W_{21} .$$

Перший інтеграл береться за всім простором, другий — за об'ємом одного з провідників. У випадку квазілінійних струмів енергію можна виразити через коефіцієнт взаємної індукції L_{12} :

$$W_{12} = c^{-2} L_{12} I_1 I_2 . \quad (4.15)$$

Формулі (4.15) можна надати вигляду

$$W_{12} = I_1 \Phi_{12} / c^2 ,$$

де Φ_{12} — потік магнітної індукції, який утворює другий струм через контур першого струму:

$$\Phi_{12} = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 = \frac{1}{c} L_{12} I_2 . \quad (4.16)$$

Коефіцієнт взаємної індукції можна обчислити із виразу для енергії (4.15), потоку магнітної індукції (4.16) або, у випадку лінійних струмів, обчислений за формулою

$$L_{12} = \mu \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} .$$

Узагальнені сили F_i які діють між двома нерухомими струмами, можна визначати диференціюванням енергії взаємодії W_{12} (або величини $U_{12} = -W_{12}$, що називається потенціальною функцією) за відповідними узагальненими координатами:

$$F_i = \frac{\partial W_{12}}{\partial q_i} = - \frac{\partial U_{12}}{\partial q_i} .$$

Для обчислення сил можна використати також формулу Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} (d\vec{l} \cdot \vec{B}),$$

де $d\vec{l}$ — елемент контуру, по якому тече струм I ; $d\vec{F}$ — сила, що діє на цей елемент з боку зовнішнього поля \vec{B} .

* * *

Приклад 4.4. Всередині тонкої провідної циліндричної оболонки радіуса b розміщений коаксіальний до неї провідник радіуса a . По цих провідниках течуть сталі струми однакової величини J у протилежних напрямках. Визначити магнітне поле \vec{H} , яке створює така система в усіх точках простору. Розв'язати задачу двома способами: інтегруванням диференціальних рівнянь Максвелла та за допомогою рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint H_\alpha dl = \frac{4\pi}{c} J.$$

Розв'язання. Перший спосіб. Задачу зручно розв'язувати у циліндричній системі координат. Нехай напрямок струму по провіднику з меншим радіусом збігається з напрямком осі z . Ротор та дивергенція вектора \vec{H} у такій системі запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\alpha + \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rH_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \right) \vec{e}_z; \end{aligned}$$

$$\text{div } \vec{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_z}{\partial z}.$$

Оскільки $\vec{j} = j\vec{e}_z$, $(\text{rot } H)_z = \frac{4\pi}{c} j$.

З урахуванням рівняння (4.7) маємо $H_r = 0$, $H_z = 0$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = \frac{4\pi}{c} j.$$

В області $r < a$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = \frac{4\pi}{c} \frac{J}{\pi a^2}, \text{ звідки інтегруванням за } r \text{ отримуємо}$$

$$H_\alpha = \frac{2Jr}{ca^2}.$$

В області $a \leq r \leq b$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = 0, \text{ звідки } H_\alpha = \frac{C_1}{r}, \text{ де } C_1 \text{ — константа інтегру-$$

вання, яку знаходимо з граничної умови (4.11):

$$\frac{C_1}{a} - \frac{2Ja}{ca^2} = 0.$$

Звідси $C_1 = \frac{2J}{c}$, а вираз для магнітного поля набуде вигляду

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr}.$$

В області $r > b$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\alpha) = 0, \text{ звідки } H_\alpha = \frac{C_2}{r}; \text{ константу інтегрування } C_2$$

теж знаходимо з граничної умови (4.11):

$$\frac{C_2}{b} - \frac{2J}{cb} = -\frac{4\pi}{c} \frac{J}{2\pi b},$$

звідки $C_2 = 0$ і $H_\alpha = 0$.

Другий спосіб. Для того щоб виконати інтегрування за формулою (4.12), виразимо елемент лінії $d\vec{l}$ через обрані циліндричні координати r та α :

$$d\vec{l} = \vec{e}_\alpha r d\alpha;$$

$$\oint \vec{H} \vec{e}_\alpha r d\alpha = \int_0^{2\pi} H_\alpha r d\alpha = H_\alpha 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I.$$

Для першої області $j = \frac{J}{\pi a^2}$, $I(r) = j\pi r^2$, тоді остаточно

маємо

$$H_{\alpha} 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J \frac{r^2}{a^2} \quad \text{або} \quad H_{\alpha} = \frac{2J}{ca^2} r.$$

Для другої області

$$H_{\alpha} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J \quad \text{або} \quad H_{\alpha} = \frac{2J}{cr}.$$

Для третьої області $I = 0$ і $H_{\alpha} = 0$.

Отже, остаточно отримано такий розподіл магнітного поля у просторі:

$$H_r = H_z = 0, \quad H_{\alpha} = \begin{cases} \frac{2Jr}{ca^2}, & \text{якщо } r < a; \\ \frac{2J}{cr}, & \text{якщо } a \leq r \leq b; \\ 0, & \text{якщо } r > b. \end{cases}$$

Приклад 4.5. Визначити магнітне поле \vec{H} , яке створюють дві паралельні площини, по яких течуть струми з однаковою поверхневою густиною $i = \text{const}$. Розглянути два випадки: а) струми течуть у протилежних напрямках; б) струми напрямлені однаково.

Розв'язання. Магнітне поле від двох площин зі струмами буде дорівнювати векторній сумі магнітних полів, створюваних кожною площиною зі струмом:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2.$$

Очевидно, що в разі протилежного напрямку струмів магнітні поля \vec{H}_1 і \vec{H}_2 будуть співнаправлені в області між площинами та протилежно напрямлені в області поза площинами. Оскільки за умовою струми однакові, то $|\vec{H}_1| = |\vec{H}_2|$. Отже, у випадку а) за межами площин $H = 0$, а між площинами $H = 2H_1$.

Знайдемо магнітне поле, створюване площиною зі струмом.

Коли електричний струм протікає по тонкій пластині, можна знехтувати товщиною пластини, а розподіл струму по поверхні

зручно характеризувати лінійною густиною. Лінійна густина струму є певним аналогом поверхневої густини заряду. Отже, $i = \frac{dI}{dl}$, звідки $I = \oint i dl$.

Виберемо прямокутний контур для розрахунку циркуляції вектора \vec{H}_1 таким чином, що площина контуру перпендикулярна до пластини і напрямку струму, а дві сторони контуру (нехай вони мають довжину l) паралельні пластині. Циркуляція вектора \vec{H}_1 по обраному контуру дасть такий вираз:

$$\oint H_{1l} dl = 2H_1 l.$$

З іншого боку,

$$\oint H_{1l} dl = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} i l.$$

Остаточно $H_1 = \frac{2\pi}{c} i$; $H = \frac{4\pi}{c} i$.

У випадку співнапрямлених струмів уздовж площин результуюче магнітне поле буде відмінним від нуля в області поза площинами, а між площинами магнітні поля \vec{H}_1 і \vec{H}_2 напрямлені протилежно, отже, в сумі маємо нуль.

Таким чином, а) між площинами $H = \frac{4\pi}{c} i$, за їх межами $H = 0$; б) між площинами $H = 0$, за їх межами $H = \frac{4\pi}{c} i$. В обох випадках магнітне поле напрямлене перпендикулярно до струму і паралельно площинам.

Приклад 4.6. Лінія складається з двох коаксіальних тонких циліндричних оболонок з радіусами a і b ($a < b$), простір між ними заповнений речовиною з магнітною проникністю μ . Знайти коефіцієнт самоіндукції на одиницю довжини L .

Розв'язання. Згідно з виразом (4.13) та з урахуванням співвідношення (4.8) енергію магнітного поля на одиницю довжини необмежено довгого прямого дроту подаємо інтегралом

$$W = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 2\pi r dr .$$

Магнітне поле циліндричного провідника $H = \frac{2I}{cr}$. Підставляючи його у вираз для енергії та виконавши інтегрування за r від a до b , знаходимо

$$W = \frac{\mu I^2}{c^2} \ln \frac{b}{a} .$$

Порівнюючи співвідношення (4.17) з виразом (4.14), дістаємо вираз для коефіцієнта самоіндукції на одиницю довжини:

$$L = 2\mu \cdot \ln \frac{b}{a} .$$

Задачі для самостійного розв'язання

4.12. Знайти напруженість магнітного поля всередині і зовні циліндричного провідника, по якому тече струм, рівномірно розподілений по його перерізу з густиною j . Радіус провідника R .

Відповідь.

$$\vec{H} = \frac{2\pi}{c} [\vec{j} \times \vec{r}], r < R; \quad \vec{H} = \frac{2\pi R^2}{cr^2} [\vec{j} \times \vec{r}], r > R,$$

де r — відстань від осі циліндра.

4.13. Знайти напруженість магнітного поля всередині циліндричної порожнини всередині циліндричного провідника, по якому тече струм, рівномірно розподілений по його перерізу з густиною j . Осі циліндра, що утворює порожнину, і циліндричного провідника паралельні і розміщені одна від одної на відстані a .

Відповідь. $\vec{H} = \frac{2\pi}{c} [\vec{j} \times \vec{a}]$.

4.14. Знайти напруженість магнітного поля площини, по якій тече струм із поверхневою густиною i , однаковою в будь-якій точці площини.

$$\text{Відповідь. } H_y = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c}i, & x < 0, \\ \frac{2\pi}{c}i, & x > 0. \end{cases}$$

4.15. Уздовж нескінченної прямолінійної смуги, що має ширину a , тече струм, рівномірно розподілений по її ширині, з густиною поверхневого струму i . Знайти напруженість магнітного поля. Розглянути частковий випадок, коли ширина смуги прямує до нескінченності. Порівняти з розв'язком задачі 4.14.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь. } H_x &= \frac{i}{c} \ln \frac{x^2 + (y - a/2)^2}{x^2 + (y + a/2)^2}, \\ H_y &= \frac{2i}{c} \left(-\operatorname{arctg} \frac{y - a/2}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y + a/2}{x} \right), \\ H_z &= 0. \end{aligned}$$

Якщо $a \rightarrow \infty$, відповідь збігається з відповіддю до задачі 4.14.

4.16. По двох нескінченних лінійних провідниках, відстань між якими d , течуть у протилежних напрямках струми I . Обчислити векторний потенціал системи.

$$\text{Відповідь. } A_z = \frac{2}{c} I \ln \frac{r_2}{r_1}, \text{ де } r_1 \text{ і } r_2 \text{ — відстані від точки спостереження до першого і другого провідника відповідно.}$$

реження до першого і другого провідника відповідно.

4.17. Знайти векторний потенціал і напруженість магнітного поля, створюваного струмом I , що тече по кільцю радіуса R . Розглянути випадок, коли точка спостереження розміщена на осі кільця.

$$\text{Відповідь. } A_\phi = \frac{4\mu_0 I}{ck} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{1/2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K(k) - E(k) \right],$$

де ρ — відстань від точки спостереження до осі кільця,

$$k^2 = \frac{4R\rho}{(R + \rho)^2 + z^2}; \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \text{ — еліптичний ін-}$$

теграл першого роду; $E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$ — еліптичний інтеграл другого роду,

$$H_\rho = \frac{2I}{c} \frac{z}{\rho \left[(R + \rho)^2 + z^2 \right]^{1/2}} \cdot \left[-K(k) + \frac{R^2 + \rho^2 + z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} E(k) \right];$$

$$H_z = \frac{2I}{c} \frac{1}{\rho \left[(R + \rho)^2 + z^2 \right]^{1/2}} \cdot \left[K(k) + \frac{R^2 - \rho^2 - z^2}{(R - \rho)^2 + z^2} E(k) \right];$$

$$H_\varphi = 0.$$

$$\text{На осі симетрії } \rho \rightarrow 0, H_\rho \rightarrow 0, H_z = \frac{2\pi}{c} \frac{R^2 I}{(R^2 + z^2)^{1/2}}.$$

4.18. У середині циліндра радіуса R_2 міститься провідник радіуса R_1 , магнітна проникність якого дорівнює μ_1 . Між провідником і циліндром — середовище з магнітною проникністю μ_2 . Визначити індуктивність L одиниці довжини контуру.

$$\text{Відповідь. } L = \frac{\mu_1}{2} + 2\mu_2 \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

4.19. Показати, що постійне однорідне магнітне поле, індукція якого \vec{B} , можна описувати векторним потенціалом $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{B} \times \vec{r}]$.

4.20. Знайти власні частоти двох індуктивно пов'язаних контурів із коефіцієнтами самоіндукції L_1 і L_2 , коефіцієнтом взаємної індукції L_{12} , ємностями C_1 і C_2 та з рівними нулю активними опорами.

$$\text{Відповідь. } \omega_{12}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \mp \left[(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4C_1 C_2 L_{12}^2 \right]^{1/2}}{2C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)}.$$

Розділ 5 ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

5.1. Хвильове рівняння та його прості розв'язки

Рівняння Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t); \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t); \quad (5.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0. \quad (5.4)$$

де — $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Густина енергії електромагнітного поля

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2).$$

Вектор Пойнтінга

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}.$$

Електромагнітне поле для $\rho_0 = 0$ і $j_0 = 0$:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = 0;$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0.$$

Часткова поляризація хвиль:

– тензор поляризації

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_\alpha(t)E_\beta^*(t)}, \quad \alpha, \beta = 1, 2; \quad (5.5)$$

– інтенсивність поля

$$J_{\alpha\alpha} = I.$$

Калібрування Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Калібрування Кулона

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Хвильове рівняння або однорідне рівняння Даламбера

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Приклад 5.1. Записати рівняння Даламбера і умову Лоренца для компонент Фур'є потенціалів $\varphi(\vec{r}, t)$, $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Розглянути усі три варіанти розкладів Фур'є.

Розв'язання. Розкладання на гармонічні складові:

$$\Delta \vec{A}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A}_\omega = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_\omega;$$

$$\Delta \varphi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_\omega = -4\pi \rho_\omega;$$

$$\operatorname{div} \vec{A}_\omega - \frac{i\omega}{c} \varphi_\omega = 0.$$

Розкладання на плоскі хвилі:

$$\ddot{\vec{A}}_{\vec{k}} + k^2 c^2 \vec{A}_{\vec{k}} = 4\pi c \vec{j}_{\vec{k}};$$

$$\ddot{\phi}_{\vec{k}} + k^2 c^2 \phi_{\vec{k}} = 4\pi c^2 \rho_{\vec{k}};$$

$$i c \vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} + \dot{\phi}_{\vec{k}} = 0.$$

Розкладання на плоскі монохроматичні хвилі:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{A}_{\vec{k}\omega} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\vec{k}\omega};$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \phi_{\vec{k}\omega} = 4\pi \rho_{\vec{k}\omega};$$

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}\omega} - \frac{\omega}{c} \phi_{\vec{k}\omega} = 0.$$

Приклад 5.2. У загальному випадку з комплексної амплітуди $\vec{E}_0 = \vec{E}_{01} + i\vec{E}_{02}$, де \vec{E}_{01} , \vec{E}_{02} — дійсні вектори, можна виділити два взаємно перпендикулярні дійсні вектори \vec{e}_{01} , \vec{e}_{02} , такі, що

$$\vec{E}_0 = (\vec{e}_{01} + i\vec{e}_{02}) e^{i\alpha}, \quad \vec{e}_{01} \cdot \vec{e}_{02} = 0,$$

а α ($-\pi < \alpha \leq \pi$) — деяка початкова фаза.

а) Виразити початкову фазу через первісно задані вектори \vec{E}_{01} , \vec{E}_{02} .

б) Показати, що спостережуване поле (дійсна частина комплексного вектора \vec{E}) записується у вигляді

$$\vec{E} = \vec{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) - \vec{e}_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha).$$

в) Показати, що кінець вектора \vec{E} описує в певній точці простору або еліпс (*еліптична поляризація*), або коло (*колова, чи циркулярна, поляризація*), або коливається вздовж деякої прямої (*лінійна поляризація*). У випадку еліптичної або колової поляризації можливі два протилежні напрямки обертання, а в разі лінійної поляриза-

ції — коливання в двох взаємно перпендикулярних напрямках. Тому за заданого напрямку поширення хвилі є два різні незалежних типи поляризації.

г) Як визначити напрямок обертання вектора \vec{E} відносно напрямку поширення хвилі?

Розв'язання. Для визначення напрямків обертання запишемо рівняння (5.5) у проекціях на осі координат, вибравши праву систему координат, що постійно використовується, з віссю Ox уздовж \vec{e}_1 і віссю Oz у напрямку поширення хвилі \vec{k} . Аргумент тригонометричних функцій запишемо так, щоб він зростав зі збільшенням t . Отримаємо:

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \alpha);$$

$$E_y = \pm E_2 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \alpha),$$

де $E_1 \geq 0$ і $E_2 \geq 0$, знак «+» у другій формулі відповідає правій трійці векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k}$, а знак «-» — лівій трійці.

За знака «+» хвиля має праву спіральність, тобто напрямок обертання вектора \vec{E} і напрямок поширення утворюють правий гвинт, у разі знака «-» — спіральність ліва (гвинт з лівою нарізкою). Унаслідок історичних умов в оптиці використовується протилежна термінологія: обертання вектора \vec{E} у напрямку правого гвинта називають *лівим*, а протилежне обертання — *правим*.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} / (E_{01}^2 + E_{02}^2).$$

Приклад 5.3. Плоска монохроматична хвиля з інтенсивністю I поширюється вздовж осі Oz і поляризована по еліпсу з піввісями a, b . Велика піввісь a утворює кут ϑ з віссю Ox . Скласти тензор поляризації і розглянути можливі часткові випадки.

Розв'язання. Введемо прямокутні осі $x' \parallel a$ та $y' \parallel b$. У цих осях комплексна амплітуда поля матиме вигляд

$$\vec{E}_0 = a\vec{e}_{x'} \pm ib\vec{e}_{y'},$$

де знак «+» відповідає правій еліптичній поляризації, а знак «-» — лівій.

Інтенсивність $I = a^2 + b^2$. Фазу обрано рівною нулю для x' — компоненти поля. Виражаючи тепер орти $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}$ через \vec{e}_x, \vec{e}_y , отримуємо для компонент I_{ik} :

$$I_{11} = a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta;$$

$$I_{22} = a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta;$$

$$I_{12} = (a^2 - b^2) \sin \vartheta \cos \vartheta \pm 2iab = I_{21}^*.$$

Верхній знак відповідає правій еліптичній поляризації, нижній — лівій. Якщо $b = 0$, поляризація лінійна і тензор I_{ik} має вигляд

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Якщо $a = b = \sqrt{I/2}$, поляризація колова і

$$I_{ik} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5.4. Положення деякого об'єкта визначається за допомогою радіолокації. З якою граничною точністю можна виконати це вимірювання, якщо відстань до об'єкта l , довжина хвилі λ ?

Розв'язання. Хвильовий імпульс, що підсиляється радіолокатором, має ширину Δx , яка пов'язана з поперечним розкидом хвильових векторів k_{\perp} співвідношенням $\Delta x k_{\perp} \geq 1$. З іншого боку, вочевидь, $\Delta x/l \approx k_{\perp}/k$. Із цих двох співвідношень знаходимо неточність у визначенні положення об'єкта:

$$\Delta x \geq \sqrt{l\lambda}.$$

Приклад 5.5. Побудувати функцію Гамільтона вільного електромагнітного поля в головних координатах і записати рівняння поля в гамільтоновій формі.

Розв'язання. Обчислимо енергію поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + H^2) dV \quad (5.7)$$

в основній області V . Для цього визначимо напруженості поля

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\vec{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}\sigma} \dot{q}_{\vec{k}\sigma} \vec{A}_{\vec{k}\sigma} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{k}\sigma} \dot{q}_{\vec{k}\sigma}^* \vec{A}_{\vec{k}\sigma}^* ; \\ \vec{H} &= \text{rot } \vec{A} = i \sum_{\vec{k}\sigma} q_{\vec{k}\sigma} [\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}\sigma}] = -i \sum_{\vec{k}\sigma} q_{\vec{k}\sigma}^* [\vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}\sigma}^*]. \end{aligned}$$

Користуючись умовою ортогональності, отримаємо з рівняння (5.7)

$$W = \frac{(A^0)^2 V}{8\pi c^2} \sum_{\vec{k}\sigma} \left(\dot{q}_{\vec{k}\sigma}^*(t) \dot{q}_{\vec{k}\sigma}(t) + c^2 k^2 q_{\vec{k}\sigma}^*(t) q_{\vec{k}\sigma}(t) \right),$$

чи, підставляючи сюди $q_{\vec{k}\sigma}(t) = b_{\vec{k}\sigma}(t) + b_{-\vec{k}\sigma}^*(t)$, отримаємо

$$W = \frac{(A^0)^2 V}{2\pi c^2} \sum_{\vec{k}\sigma} \omega_k^2 b_{\vec{k}\sigma}^*(t) b_{\vec{k}\sigma}(t). \quad (5.8)$$

Повна енергія поля в об'ємі V виразилася у вигляді суми енергій окремих власних коливань, виражених через комплексні головні координати. Уведемо дійсні змінні $Q_{\vec{k}\sigma}$, $P_{\vec{k}\sigma}$:

$$b_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{2} \left(Q_{\vec{k}\sigma} + \frac{iP_{\vec{k}\sigma}}{\omega_k} \right). \quad (5.9)$$

З їх визначення (5.9) випливає, що ці змінні також задовольняють рівняння руху гармонічного осцилятора. Енергія системи, яка виражена через узагальнені координати та імпульси, називається функцією Гамільтона системи.

Позначимо функцію Гамільтона через \mathcal{H} і підставимо в рівняння (5.8) комплексні координати, що виражені через дійсні змінні (5.9), отримаємо

$$\mathcal{H} = \frac{(A^0)^2 V}{8\pi} \sum_{\vec{k}\sigma} (P_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\sigma}^2).$$

На цьому етапі зручно обрати сталу нормування A^0 таким чином, щоб ефективні маси осциляторів поля стали одиничними:

$$A^0 = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}.$$

У підсумку гамільтонова функція поля набуває канонічного вигляду

$$\mathcal{H} = \sum_{\vec{k}\sigma} \mathcal{H}_{\vec{k}\sigma}, \text{ де } \mathcal{H}_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{2} (P_{\vec{k}\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\sigma}^2). \quad (5.10)$$

Канонічні рівняння, або рівняння Гамільтона, виходять з функцій Гамільтона (5.10) звичайним шляхом:

$$\dot{Q}_{\vec{k}\sigma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{\vec{k}\sigma}} = P_{\vec{k}\sigma}, \quad \dot{P}_{\vec{k}\sigma} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_{\vec{k}\sigma}} = -\omega_k^2 Q_{\vec{k}\sigma}$$

і приводять до правильного рівняння руху

$$\ddot{Q}_{\vec{k}\sigma} + \omega_k^2 Q_{\vec{k}\sigma} = 0.$$

Це доводить, що Q, P є канонічні змінні для осциляторів поля.

Приклад 5.6. Дві плоскі монохроматичні лінійно поляризовані хвилі однієї частинки поширюються вздовж осі Oz . Перша хвиля поляризована вздовж Ox і має амплітуду a , друга поляризована вздовж Oy , має амплітуду b та випереджає першу за фазою на χ . Дослідити поляризацію результуючої хвилі залежно від a/b .

Розв'язання. За методикою прикладу 5.2 записуємо

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = a\vec{e}_x + be^{i\chi}\vec{e}_y = (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)e^{i\alpha}$$

і знаходимо:

$$\vec{E}_1 = a \cos \alpha \vec{e}_x + b \cos (\chi - \alpha) \vec{e}_y, \quad (5.11)$$

$$\vec{E}_2 = -a \sin \alpha \vec{e}_x + b \sin (\chi - \alpha) \vec{e}_y, \quad (5.12)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2 \cos 2\chi}, \quad -\pi < \alpha \leq \pi. \quad (5.13)$$

(рівняння (5.11) отримано за умови $\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$). Спіральність результуючої хвилі визначається знаком добутку $\vec{E}_2 \cdot \vec{e}_{y'}$, де $\vec{e}_{y'} = \vec{n} \times \vec{E}_1 / E_1$ — третій орт, який складає праву трійцю з $\vec{e}_{x'} = \vec{E}_1 / E_1$ та \vec{n} . Використовуючи вирази (5.11)–(5.13), знаходимо $\vec{E}_2 \cdot \vec{e}_{y'} = ab \sin \chi / E_1$.

Згідно з результатами прикладу 5.2, якщо $ab > 0$ і $\sin \chi > 0$, $0 < \chi < \pi$, спіральність права, якщо $\sin \chi < 0$, $-\pi < \chi < 0$ — ліва. У разі, якщо $\chi = 0$ і $\chi = \pm\pi$, то поляризації лінійні у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. Куля радіуса a із зарядом e , який рівномірно розподілений за об'ємом, обертається зі змінною кутовою швидкістю $\Omega(t)$ навколо одного з її діаметрів. Записати густини $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{j}(\vec{r}, t)$, перевірити, чи задовольняються рівняння неперервності $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Відповідь. $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3} \Theta(a - r)$; $\vec{j} = \rho \Omega \times \vec{r}$, де Θ — ступенева функція.

5.2. Нехай через одиничну площадку проходить електромагнітне збурення кінцевої тривалості. Необхідно виразити спектральну густину потоку енергії електромагнітного поля Γ_ω через гармоніки Фур'є \vec{E}_ω та \vec{H}_ω . Величина Γ_ω нормована умовою

$$\int_0^{\infty} \Gamma_{\omega} d\omega = \Gamma = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) dt,$$

де Γ — повна густина потоку енергії через одиничну площадку за весь час проходження збурення.

Відповідь. $\Gamma_{\omega} = \frac{c}{4\pi^2} \operatorname{Re} [\vec{E}_{\omega} \times \vec{H}_{\omega}^*].$

5.3. Використовуючи рівняння Максвелла (5.1)—(5.4), показати, що плоскі хвилі задовольняють умови *поперечності*

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0.$$

Показати також, що в плоских хвилях, які поширюються в одному напрямку, електричний та магнітний вектори взаємно перпендикулярні і пов'язані співвідношеннями

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}, \quad \vec{E} = \vec{H}.$$

Знайти зв'язок між густиною електромагнітної енергії та густиною потоку енергії (вектором Пойнтінга) у таких хвилях.

Відповідь. $\gamma = c w \vec{n}$, $w = (E^2 + H^2)/8\pi = E^2/4\pi$. Енергія переноситься у просторі зі швидкістю c .

5.4. Електромагнітна хвиля є суперпозицією двох некогерентних «майже монохроматичних» хвиль рівної інтенсивності I з приблизно однаковими частотами та хвильовими векторами. Обидві хвилі поляризовані лінійно, напрямки поляризації задаються в площині, що перпендикулярна до їх хвильового вектора, ортами $\vec{e}^{(1)}(1, 0)$ і $e^{(2)}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Побудувати тензор поляризації I_{ik} результуючої частково поляризованої хвилі та визначити ступінь її поляризації. З'ясувати характер поляризації цієї хвилі.

Відповідь. Амплітуда сумарної хвилі

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E(\vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)} e^{i\alpha}),$$

де α — зсув фаз, що змінюється безладно, $|\vec{E}|^2 = I$.

Компоненти тензора поляризації за визначенням дорівнюють

$$I_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = I \overline{(\vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)} e^{i\alpha})_i (\vec{e}^{(1)} + \vec{e}^{(2)} e^{-i\alpha})_k}.$$

Через усереднення за часом отримаємо $\overline{e^{\pm i\alpha}} = 0$, тому тензор поляризації матиме вигляд

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & 1 - \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо

$$P = |\cos \vartheta|.$$

Такий самий результат можна мати, якщо діагоналізувати тензор I_{ik} . Його головні значення $I_1 = 1 + |\cos \vartheta|$, $I_2 = 1 - |\cos \vartheta|$. Звідси знову $P = (I_1 - I_2)/(I_1 + I_2) = |\cos \vartheta|$. Базисні вектори $\bar{e}_1 = \left(\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$ та $\bar{e}_2 = \left(-\sin \frac{\vartheta}{2}, \cos \frac{\vartheta}{2} \right)$. Вони речовинні у цьому випадку.

Результуюча хвиля складається з неполяризованої частини з інтенсивністю $I(1 - |\cos \vartheta|)$ і лінійно поляризованої вздовж напрямку

$\bar{e}_1 = \left(\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$ частини з інтенсивністю $I|\cos \vartheta|$:

$$(I_{ik}) = I(1 - |\cos \vartheta|)(\delta_{ik}) + I|\cos \vartheta| \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} & \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \\ \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} & \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

Результуюча хвиля повністю поляризована (але не монохроматична), якщо $\vartheta = 0$. Якщо $\vartheta = \pi/2$ — повна деполаризація.

5.5. Хвильовий пакет $\psi(x, t)$ утворено суперпозицією плоских монохроматичних хвиль з різними частотами у вільному просторі. Форма пакета у разі, якщо $x = 0$, $\psi(0, t) = u(t)$, відома. Знайти амплітудну функцію $\psi(k)$.

Відповідь. $\psi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{ikct} dt.$

5.6. Дослідити в попередній задачі залежність поляризації від зсуву фаз χ для випадку $a = b$.

Відповідь. Якщо $\chi = 0$ поляризація є лінійною, площина поляризації проходить через бісектрису кута між осями Ox , Oy . Якщо $\chi = \pi$, поляризація також лінійна, площина поляризації проходить через бісектрису кута між осями Ox та $-Oy$. У випадку $\chi = \pi/2$ поляризація є коловою з правою спіральністю (рис. 5.1, а).

Якщо $\chi = -\pi/2$ — поляризація колова з лівою спіральністю (рис. 5.1, б). В інших випадках вона еліптична, причому за умови $0 < \chi < \pi$ спіральність буде правою, а якщо $-\pi < \chi < 0$ — лівою.

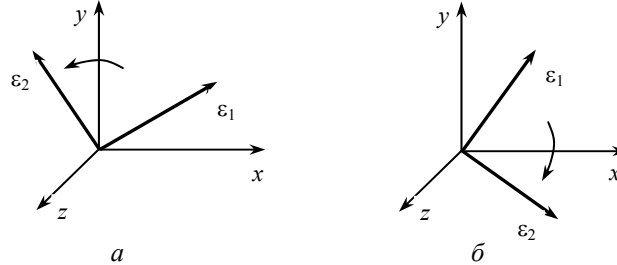


Рис. 5.1

5.7. Розв'язати задачу 5.4 для випадку, коли інтенсивності хвиль різні ($I_1 \neq I_2$), а напрямки поляризацій утворюють кут $\pi/4$.

Відповідь. Тензор поляризації

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 + I_2/2 & I_2/2 \\ I_2/2 & I_2/2 \end{pmatrix}$$

(вісь x_1 збігається з напрямком поляризації першої хвилі).

Ступінь поляризації

$$P = \frac{2\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1 + I_2 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2}}.$$

Результуюча хвиля складається з неполяризованої хвилі з інтенсивністю $(I_1 + I_2)(1 - P)/2$ і лінійно поляризованої хвилі. Напрямок лінійної поляризації утворює кут

$$\vartheta = \arctg \frac{2I_2\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1(I_1 + I_2) + (3I_1 + 2I_2)\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}$$

з напрямком поляризації першої хвилі.

5.8. Тензор поляризації електромагнітної хвилі, який є ермітовим, можна подати у вигляді

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I \left(\delta_{ik} + \sum_{l=1}^3 \zeta_l \hat{\tau}_{ik}^{(l)} \right) = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 + \zeta_3 & \zeta_1 - i\zeta_2 \\ \zeta_1 + i\zeta_2 & 1 - \zeta_3 \end{pmatrix},$$

де I — повна інтенсивність хвилі; ζ_i — речові параметри, що задовольняють умову $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \leq 1$ (параметри Стокса); $\hat{\tau}^{(l)}$ — матриці:

$$\hat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

З'ясувати фізичний зміст параметрів ζ_i . Для цього виразити ступінь поляризації ρ хвилі через ζ_i та визначити поляризації двох основних хвиль, на які розпадається частково поляризована хвиля, у таких трьох випадках:

а) $\zeta_1 \neq 0, \zeta_2 = \zeta_3 = 0$; б) $\zeta_2 \neq 0, \zeta_1 = \zeta_3 = 0$; в) $\zeta_3 \neq 0, \zeta_1 = \zeta_2 = 0$.

Відповідь. $\rho = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$; якщо $\zeta = 0$ хвиля, не є поляризованою,

якщо $\zeta = 1$ — вона повністю поляризована.

Припустимо $\zeta_i = \zeta \eta_i$, де $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$. Тоді

$$I_{ik} = \frac{I}{2}(1 - \zeta)\delta_{ik} + \frac{I\zeta}{2} \left(1 + \sum_{l=1}^3 \eta_l \tau_{ik}^{(l)} \right).$$

Перший член у цьому виразі відповідає повністю неполяризованому стану, а другий — повністю поляризованому. У випадку а) $\eta_3 = 1, \eta_1 = \eta_2 = 0$.

Порівнюючи

$$I_{ik} = I\zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

з виразом $I_{ik} = In_i n_k^*$, бачимо, що в цьому випадку $n_1 = 1, n_2 = 0$, тобто тензор I_{ik}'' описує хвилю, поляризовану в напрямку осі x (поширюється у напрямку z).

Аналогічним чином легко впевнитися, що у випадку б) $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ і хвиля лінійно поляризована у напрямку, який утворює 45° з віссю x , а у випадку в) $n_2 = 1, n_1 = n_3 = 0$ і хвиля поляризована по колу.

5.9. Затухаюче джерело випромінювання створює сигнал $U'(t) = A_0 \Theta(t) e^{-\gamma t/2} \sin \omega_0 t$, де $\Theta(t)$ — ступенева функція; γ — стала затухання, $A_0 = \text{const}$. За яких умов сигнал буде квазімонохроматичним? Знайти розподіл енергії за частотами, користуючись поняттям аналітичного сигналу. Оцінити смугу частот цього сигналу і добуток $\Delta\omega\Delta t$.

Відповідь. $|a(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4}$.

Сигнал буде вузькосмуговим (квазімонохроматичним) за умови, що $\gamma \ll \omega_0$. Якщо визначити Δt як час, за який інтенсивність сигналу $I \propto |U(t)|^2$ зменшується в e разів, а $\Delta\omega$ — як розлад, за якого спектральна потужність зменшується також у e разів, то $\Delta t \Delta\omega = \sqrt{e-1}/2$. Отримана в цій задачі форма спектра називається *лоренцовим контуром*.

5.10. Ланцюг складається з двох з'єднаних послідовно котушок з індуктивностями L_1 і L_2 . Взаємна індукція котушок дорівнює \mathfrak{M} . Знайти повну індуктивність ланцюга. Як зміниться сумарна індуктивність, якщо витки однієї котушки перемотати у зворотному напрямку?

Відповідь. $U = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I_2^2 - \mathfrak{M} I_1 I_2$, де I_1, I_2 — струми в котушках; \mathfrak{M} — коефіцієнт взаємної індукції.

Оскільки за умовою задачі $I_1 = I_2 = I$, тому електричну енергію ланцюга можна подати у вигляді $U = \frac{1}{2} \mathcal{L} I^2$, де $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}$. Якщо витки однієї котушки перемотати у зворотному напрямку, то зміниться знак у \mathfrak{M} .

5.11. Плоска електромагнітна хвиля з частотою ω відбивається від дзеркала, що рухається зі швидкістю v у напрямку поширення

хвилі. Використовуючи рівняння Максвелла, знайти частоту відбитої хвилі, яка реєструється нерухомим спостерігачем.

Відповідь. $\omega' = \omega \left[1 - \left(\frac{v}{c} \right) \right] / \left[1 + \left(\frac{v}{c} \right) \right]$.

5.12. Використовуючи симетрію рівнянь Максвелла та вигляд електричного і магнітного полів осцилюючого електричного диполя, знайти поле осцилюючого магнітного диполя. Це поле повинно збігатися з полем диполя, що створюється контуром зі струмом $i = i_0 \cos \omega t$, радіус якого a ($a \ll c/\omega$).

Відповідь. $B_\phi = 0$,

$$B_\theta = \frac{\pi a^2 i_0}{c^2} \sin \theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right];$$

$$B_r = \frac{2\pi a^2 i_0}{c^2} \cos \theta \left[\frac{1}{r^3} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right];$$

$$\vec{E} = c [\vec{B} \times \vec{e}_r].$$

5.13. Плоскополяризована хвиля падає нормально на поверхню немагнітного середовища, що має діелектричну проникність ϵ і провідність σ^* . Знайти коефіцієнт відбиття R .

Відповідь. $R = \frac{(1-n)^2 + \kappa^2}{(1+n)^2 + \kappa^2}$,

де $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{\omega \epsilon \epsilon_0} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}$; $\kappa = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{\omega \epsilon \epsilon_0} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}$.

5.14. Уздовж плоскої межі розділу двох діелектриків, що мають протилежні за знаком діелектричні проникності ϵ_1 і $-\epsilon_2$, поширюється поверхнева хвиля, у якій напруженість магнітного поля перпендикулярна до напрямку поширення (TM)-хвилі. Визначити закон дисперсії такої хвилі.

Відповідь. $k^2 = \frac{\omega^2 \epsilon_1 |\epsilon_2|}{c^2 (|\epsilon_2| - \epsilon_1)}$.

5.15. Електромагнітна хвиля падає під кутом ϑ_1 на плоску поверхню напівнескінченного кристала, оптична вісь якого перпендикулярна до поверхні кристала. Визначити напрямок поширення звичайного та незвичайного променів у кристалі.

Відповідь. Із рівності проєкцій хвильових векторів на межу розділу випливає, що $\frac{\sin \vartheta_2'}{\sin \vartheta_1} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ для звичайної хвилі та

$$k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2'' = k_0 \sin \vartheta_2'' \left(\frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp} \sin^2 \vartheta_2'' + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \vartheta_2''} \right)^{1/2}$$

для незвичайної хвилі; тут $k_0 = \omega_0/c$; ϑ_2'' — кут між хвильовим вектором у кристалі \vec{k}_2 та оптичною віссю; звідси

$$\operatorname{tg} \vartheta_2'' = \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} \sin \vartheta_1 / \sqrt{\varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\parallel} - \sin^2 \vartheta_1)} .$$

Напрямок поширення незвичайного променя θ'' пов'язаний з напрямком ϑ_2'' вектора \vec{k}_2 співвідношенням $\operatorname{tg} \theta'' = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel 2}} \operatorname{tg} \vartheta_2''$, тому

$$\operatorname{tg} \theta'' = \sqrt{\varepsilon_{\perp}} \sin \vartheta_1 / \sqrt{\varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\parallel} - \sin^2 \vartheta_1)} .$$

Розділ 6

ПОЛЕ РУХОМИХ ЗАРЯДІВ

6.1. Потенціали Льєнара–Віхерта

Рівняння Даламбера

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t), \\ \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho(\vec{r}, t). \end{aligned} \right\}$$

Умова Лоренца

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (6.1)$$

Функції Гріна хвильового пакета

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'), \quad (6.2)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') j(\vec{r}', t') d^3 r' dt'. \quad (6.3)$$

Запізнілі потенціали:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (6.4)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Тимчасовий аргумент розподілу зарядів і струмів показує, що поле в точці r у момент t визначається значеннями величин \vec{j} і ρ у точці \vec{r}' у попередній момент $t' = t - R/c$, де $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ — відстань. Електромагнітні збурення у вакуумі поширюються зі швидкістю c .

Енергія випромінювання в одиницю тілесного кута запишеться через вектор Пойнтінга:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \gamma \cdot \vec{n} r^2 = \frac{cr^2}{4\pi} \vec{H}^2(\vec{r}, t). \quad (6.5)$$

Сумарна інтенсивність за всіма напрямками випромінювання після інтегрування за всім телесним кутом становить

$$I(r, t) = \frac{cr^2}{4\pi} \int \vec{H}^2(\vec{r}, t) d\Omega = \frac{cr^2}{4\pi} \int \vec{E}^2(\vec{r}, t) d\Omega.$$

Приклад 6.1. Записати рівняння, яке задовольняють безвихрова (потенціальна) та соленоїдальна частини векторів електромагнітного поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Показати, що потенціальна частина електричного поля описує миттєве (не запізніле) кулонівське поле, яке створюється розподілом зарядів в один і той самий момент часу, для якого визначається $\vec{E}^{\parallel}(\vec{r}, t)$.

Розв'язання. Маємо за визначенням соленоїдальних і потенціальних величин:

$$\nabla \cdot \vec{H}^{\perp} = \nabla \cdot \vec{E}^{\perp} = \nabla \cdot \vec{j}^{\perp} = 0;$$

$$\nabla \times \vec{H}^{\parallel} = \nabla \times \vec{E}^{\parallel} = \nabla \times \vec{j}^{\parallel} = 0.$$

Згідно з рівнянням Максвелла $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ все магнітне поле є соленоїдальним, тобто $\vec{H} = \vec{H}^{\perp}$, $\vec{H}^{\parallel} = 0$. Потенціальне електричне поле задовольняє рівняння

$$\nabla \cdot \vec{E}^{\parallel}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t), \quad \nabla \times \vec{E}^{\parallel}(\vec{r}, t) = 0.$$

Це — рівняння електростатики, в яке час входить як параметр. Вони описують миттєву кулонівську взаємодію. Соленоїдальні складові задовольняють рівняння

$$\nabla \times \vec{H}^{\perp} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^{\perp}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{\perp}, \quad \nabla \times \vec{E}^{\perp} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}^{\perp}}{\partial t}.$$

Приклад 6.2. Коливання двох електричних дипольних осциляторів мають однакову частоту ω , але зсунуті за фазою на $\frac{\pi}{2}$. Амплітуди дипольних моментів рівні за величиною p і напрямлені під кутом φ одна до одної.

Відстань між осциляторами мала порівняно з довжиною хвилі. Знайти поле \vec{H} у хвильовій зоні, кутовий розподіл $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ і повну інтенсивність \bar{I} випромінювання.

Розв'язання. Направимо вісь x уздовж амплітуди моменту осцилятора, що випереджає за фазою, а як площину xy оберемо площину, у якій лежать моменти обох осциляторів. Позначимо через ϑ, α полярні кути орта \vec{n} , що вказує напрямок поширення хвилі.

Отримаємо:

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}e^{-i\omega t'} = \frac{\omega^2 p}{c^2 r} \{ \vec{e}_\vartheta [\sin \alpha + i \sin(\alpha - \varphi)] + \\ &+ \vec{e}_\alpha [\cos \alpha + i \cos(\alpha - \varphi)] \cos \vartheta \}^{-i\omega t'}; \\ \frac{d\bar{I}}{d\Omega} &= \frac{p^2 \omega^4}{8\pi c^3} \left\{ 2 - [\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha - \varphi)] \sin^2 \vartheta \right\}, \\ \bar{I} &= \frac{2p^2 \omega^4}{3c^3}.\end{aligned}$$

Випромінювання максимальне у напрямках $\vartheta = 0$ і $\vartheta = \pi$, перпендикулярних до моментів обох осциляторів, і нерівномірно розподілене за азимутом.

Це показано на рис. 6.1 у вигляді полярних діаграм для випадку $\varphi = 45^\circ$.

На рис. 6.1, *a* показано кутовий розподіл за α у площині $\vartheta = 90^\circ$, на рис. 6.1, *b* — кутовий розподіл за ϑ у площині

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} = 22,5^\circ.$$

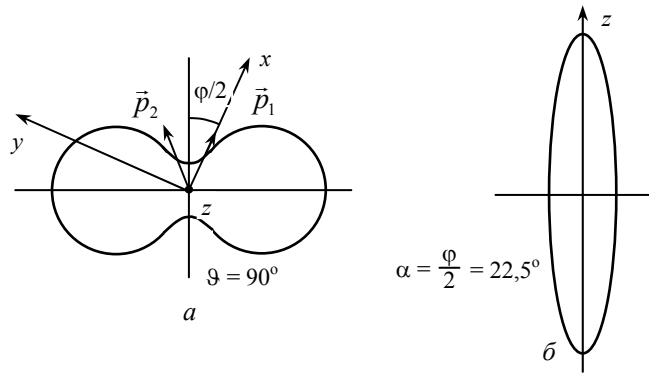


Рис. 6.1

Приклад 6.3. Знайти електромагнітне поле \vec{H}, \vec{E} заряду e , що рухається рівномірно по колу радіуса a . Рух релятивістський, кутова швидкість ω . Відстань до точки спостереження $r \gg a$. Знайти середні за часом кутовий розподіл $\overline{dI/d\Omega}$ та повну інтенсивність \bar{I} випромінювання, а також дослідити його поляризацію.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot } \vec{Z}}{\partial t} = ea \left[\vec{e}_\vartheta \left(-i \frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{\omega}{cr^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_\alpha \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + i \frac{\omega}{cr^2} \right) \cos \vartheta \right] e^{i(kr - \omega t + \alpha)}; \\ \vec{E} &= \text{rot rot } \vec{Z} = ea \left[\vec{e}_r \left(-\frac{i\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) 2 \sin \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + i \frac{\omega}{cr^2} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \vec{e}_\alpha \left(i \frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{\omega}{cr^2} - \frac{i}{r^3} \right) \right] e^{i(kr - \omega t + \alpha)}. \end{aligned}$$

У хвильовій зоні $\vec{r} \gg \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ вирази \vec{H} , \vec{E} спрощуються:

$$\vec{H} = ea \frac{\omega^2}{c^2 r} (-i\vec{e}_\vartheta + \vec{e}_\alpha \cos \vartheta) e^{i(kr - \omega t + \alpha)};$$

$$\vec{E} = ea \frac{\omega^2}{c^2 r} (\vec{e}_\vartheta \cos \vartheta + i\vec{e}_\alpha) e^{i(kr - \omega t + \alpha)} = \vec{H} \times \vec{n}.$$

Під час випромінювання у верхню півсферу ($\cos \vartheta > 0$) виходить ліва еліптична поляризація, зокрема, якщо $\vartheta = 0$ — ліва колова поляризація, а в разі випромінювання у нижню півсферу ($\cos \vartheta < 0$) — права еліптична поляризація, що переходить у колову, якщо $\vartheta = \pi$. Хвилі, які випромінюються в екваторіальну площину, мають лінійну поляризацію. Кутовий розподіл і повна інтенсивність випромінювання:

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \vec{\gamma} \cdot \vec{n} r^2 = \frac{e^2 \omega^4 a^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}.$$

Розглянутий випадок реалізується, наприклад, під час руху заряду в однорідному магнітному полі.

Приклад 6.4. Дослідити стан поляризації поля випромінювання системи осциляторів, розглянутих у прикладі 5.2, використовуючи одну й ту саму методику.

Розв'язання. Зсунувши початок відліку фази на γ , отримаємо нову амплітуду поля $\vec{H}e^{-i\gamma} = \vec{H}_1 - i\vec{H}_2$. Тоді знайдемо, що

$$\operatorname{tg} 2\gamma = 2 \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \varphi) + \cos \alpha \cos(\alpha - \varphi) \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \alpha - \sin^2(\alpha - \varphi) + [\cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha - \varphi)] \cos^2 \vartheta}.$$

Визначимо з цієї формули $\cos \gamma$ та $\sin \gamma$ і знайдемо \vec{H}_1 і \vec{H}_2 залежно від ϑ , α , φ .

Розглянемо деякі окремі випадки. Якщо $\vartheta = 90^\circ$, поляризація лінійна; площина поляризації перпендикулярна до площини xu . Якщо $\vartheta = 0, \pi$, поляризація еліптична, причому відношення пів-

вісєй еліпса дорівнює $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; зокрема, якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і $\vartheta = 0, \pi$, — поляризація колова. Легко досліджуються також випадки $\alpha = \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\varphi}{2} + \pi$. У всіх цих випадках поляризація еліптична. Якщо $\alpha = \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} + \pi$ у напрямках, що визначаються умовою

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = |\cos \vartheta|,$$

поляризація виходить коловою.

Якщо $\alpha = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$, напрямки з колової поляризації визначаються рівнянням

$$\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = |\cos \vartheta|.$$

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Записати компоненти Фур'є $\vec{A}_\omega^A(\vec{r}), \varphi_\omega^A(\vec{r})$ випереджальних потенціалів, які утворюються за формулою (6.4) при підстановці випереджальної функції Гріна G^A .

Відповідь.
$$\vec{A}_\omega^A(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\exp[-i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_\omega(\vec{r}') dV',$$

$$\varphi_\omega^A(\vec{r}) = \int \frac{\exp[-i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c]}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho_\omega(\vec{r}') dV'.$$

Гармоніки Фур'є запізнілих потенціалів містять експоненти $\exp[i(kR - \omega t)]$, $k = \omega/c$, що відповідає розбіжним сферичним хвилям, які переносять збурення від випромінювальної системи зарядів у навколишній простір. Гармоніки Фур'є випереджальних потенціалів містять експоненти $\exp[-i(kR + \omega t)]$, які описують збіжні до центра сферичні хвилі. Такі хвилі могли б створюватися деяким джерелом, розміщеним на нескінченності, але не заданою систе-

мою зарядів. Тому випереджальні потенціали непридатні для опису процесу випромінювання у нескінченному просторі.

6.2. Записати рівняння, яке задовольняють електромагнітні потенціали $\varphi(\vec{r}, t)$ та $\vec{A}(\vec{r}, t)$, якщо замість умови Лоренца (6.1) на них накладено умову $\text{div} \vec{A} = 0$ (кулонівське калібрування). Подати рівняння у такій формі, щоб у кожне з них входив один із потенціалів і джерел поля.

Відповідь. $\Delta\varphi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)$,

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\vec{j}(\vec{r}', t)}{R^3} - \frac{3\vec{R}(\vec{j}(\vec{r}', t) \cdot \vec{R})}{R^5} \right\} dV',$$

де $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$.

У рівнянні для φ час входить як параметр. Тому скалярний потенціал описує кулонівське поле, яке визначається миттєвим (незапізнілим) розподілом зарядів.

6.3. Частинка з зарядом e коливається вздовж осі Oz за законом $z(t) = a \sin \omega t$. Обчислити інтенсивності $dI_m/d\Omega$ випромінювання на кратних частотах $\omega_m = m\omega$, $m = 1, 2, \dots$, не припускаючи відношення a/λ малим.

Відповідь.
$$\vec{H}_m = i \frac{e m \omega^2}{2\pi c^2} \frac{e^{ik_m r}}{r} \int_0^T \vec{n} \times \vec{v}(\tau) \exp i(m\omega\tau - \vec{k}_m \cdot \vec{s}(\tau)) d\tau,$$

де $k_m = m\omega\vec{n}/c$, $\vec{s}(\tau) = \vec{e}_z z(\tau)$.

Інтеграл за часом виражається через функцію Бесселя. У підсумку отримуємо

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\vec{H}_m|^2 r^2 = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \text{tg}^2 \theta m^2 J_m^2(m\beta \cos \theta),$$

де $\beta = a\omega/c$, θ — кут між напрямком випромінювання \vec{n} та віссю Oz . Тут враховано, що гармоніки з номерами m і $-m$ роблять однаковий внесок у випромінювання. Якщо $\beta \ll 1$, тоді

$$\frac{dI_1}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta$$

— дипольне випромінювання;

$$\frac{dI_2}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^4 \omega^6}{8\pi c^5} \sin^2 \theta \cos^2 \theta;$$

— квадрупольне випромінювання, що містить порівняно з дипольним малий множник $(a\omega/c)^2$.

6.4. Найпростіша модель випромінювання нейтронних зірок (пульсарів) — це модель похилого ротатора: куля, що має магнітний момент \vec{m} , обертається у вакуумі з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка становить кут φ з напрямком \vec{m} .

1. Обчислити кутовий розподіл $\overline{dI/d\Omega}$ і повну інтенсивність \overline{I} випромінювання, усереднені за часом.

2. Оцінити чисельно за порядком величини магнітний момент пульсара, взявши зі спостережень характерне значення магнітного поля на поверхні нейтронних зірок $H_0 \approx 2 \cdot 10^{12}$ Е та з теорії радіус зірки $R \approx 10$ км.

3. Оцінити чисельно інтенсивність випромінювання пульсара \overline{I} і порівняти його зі світністю Сонця $L_\odot \approx 4 \cdot 10^{33}$ ерг/с, взявши з досліджень для пульсара в крабоподібній туманності період обертання $T \approx 0,033$ с.

4. Порівняти отриману інтенсивність випромінювання пульсара зі швидкістю зменшення енергії обертання зірки, яку потрібно оцінити на підставі спостережних даних про збільшення періоду обертання пульсара в крабоподібній туманності $\dot{T}/T \approx 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}$.

Відповідь: 1. Напруженості поля в хвильовій зоні обчислюємо за формулами (6.4), вважаючи $\overline{Q} = 1$. Кутовий розподіл випромінювання

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} |\overline{\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}}|^2. \quad (6.6)$$

Для обчислення правої частини використаємо рівняння руху магнітного моменту $\dot{\vec{m}} = \omega \times \vec{m}$. Отримаємо

$$(\vec{n} \times \ddot{\vec{m}})^2 = \omega^4 \vec{m}_\perp^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2(\omega t - \alpha)),$$

де \vec{m}_\perp — складова, перпендикулярна до осі обертання; ϑ — полярний кут, відлічуваний від напрямку ω ; ωt і α — азимути век-

торів \vec{m}_\perp і \vec{n} у площині, перпендикулярній до ω . Після підстановки у рівняння (6.6) і усереднення за часом знаходимо:

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 m^2 \sin^2 \varphi}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \vartheta), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 m^2 \sin^2 \varphi}{3c^3}. \quad (6.7)$$

2. Припускаючи магнітне поле пульсара дипольним, знаходимо за порядком величини $m \approx H_0 R^3 \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ Е} \cdot \text{см}^3$.

3. Підставимо в рівняння (6.7) потрібні величини $\sin^2 \varphi \approx 1$, знаходимо $\bar{I} \approx 1,3 \cdot 10^{38} \text{ ерг/с}$, що становить $\approx 3 \cdot 10^4 L_\odot$.

4. Зменшення енергії обертання обчислимо за формулою $\dot{\epsilon}_{\text{rot}} = I\omega\dot{\omega} = -2\epsilon_{\text{rot}} \dot{T}/T$, де $I = (2/5)MR^2$ — момент інерції кулі; $\dot{\epsilon}_{\text{rot}} \approx 2,6 \cdot 10^{33} \text{ г}$ — маса зірки (маса Сонця). Отримаємо $\dot{\epsilon}_{\text{rot}} \approx 5 \cdot 10^{38} \text{ ерг/с}$.

Близькість оцінок магнітодипольного випромінювання пульсара і зменшення механічної енергії обертання свідчить на користь розумності моделі. Спостережувана світність від крабоподібної туманності $\approx 4 \cdot 10^{37} \text{ ерг/с}$ у рентгенівському діапазоні і $\approx 2 \cdot 10^{36} \text{ ерг/с}$ в оптичному. Ці дані також не суперечать моделі та вказують на те, що близько 10 % енергії довгохвильового первинного випромінювання переробляється у плазмі, що оточує зірку, у вторинне рентгенівське випромінювання.

6.5. Обчислити електромагнітні потенціали та напруженості поля на відстанях, що задовольняють умову $l \ll r \ll \lambda$. Врахувати електричні дипольний, квадрупольний і магнітний дипольний члени.

Відповідь.
$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}(t') \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}(t') x_\alpha x_\beta}{2r^5};$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi(\vec{r}, t); \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\dot{\vec{p}}(t') \cdot \vec{r}}{cr} + \frac{\vec{m}(t') \times \vec{n}}{r^2};$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A} = \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{n}}{cr^2} + \frac{3\vec{n}(\vec{m} \cdot \vec{n})}{r^3} - \frac{\vec{m}}{r^3}.$$

Електричне поле виражається статичними формулами із залежними від часу дипольним і квадрупольним моментами. Магнітне поле містить додатковий член, зобов'язаний закону Біо–Савара:

якщо елементарний диполь $\vec{p}(t) = e(t)\vec{l}$, то $\vec{H}_{\text{вс}} = \dot{\vec{p}} \times \vec{n} / cr^2 = J(t)[\vec{l} \times \vec{r}] / cr^3$ становить поле елементарного струму $J(t) = \dot{q}(t)$, який тече у відрізьку l .

6.6. Знайти рівняння силових ліній електричного і магнітного полів електричного осцилятора. Простежити за якісними змінами картини поля в зоні, що прилягає до осцилятора, та у хвильовій зоні.

Відповідь. Магнітні силові лінії мають вигляд кіл, площини яких нормальні до осі z , а центри лежать на цій осі. Електричні силові лінії описуються такими рівняннями:

$$C_1 = \sin^2 \vartheta \left[\frac{1}{r} \cos(kr - \omega t) + k \sin(kr - \omega t) \right], \quad C_2 = \alpha,$$

де C_1, C_2 — сталі.

6.7. Знайти вираз для втрати моменту імпульсу за одиницю часу $-d\vec{L}/dt$ системою, що випромінює як електричний диполь.

Відповідь. Густина потоку моменту імпульсу:

$$\mathfrak{R} = \frac{[\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}](\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}})}{2\pi c^3 r^2}.$$

Для обчислення величини $-\frac{d\vec{L}}{dt} = \int \mathfrak{R} r^2 d\Omega$ зручно скористатися

формулою $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3} \delta_{ik}$.

У результаті маємо:

$$-\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \frac{2}{3c^2} \dot{\vec{p}} \times \ddot{\vec{p}} \Big|_{t'=t-\frac{r}{c}}.$$

6.8. Дослідити вплив інтерференції на випромінювання електромагнітних хвиль системою зарядів у такому прикладі: два однакові електричні заряди e рухаються рівномірно з нерелятивістською швидкістю і частотою ω по коловій орбіті радіуса a , залишаючись при цьому на протилежних кінцях діаметра. Знайти поляризацію, кутовий розподіл $\overline{dI/d\Omega}$ і інтенсивність \overline{I} випромінювання. Як змінилась інтенсивність випромінювання, якщо вилучити один із зарядів.

Відповідь. $\vec{p} = \vec{m} = 0, \vec{Q} \neq 0;$

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{A}} \times \vec{n} = -\frac{4e^2 a^2 \omega^3}{c^3 r} \sin \vartheta [\vec{e}_\vartheta \cos(2\omega t' - 2\alpha) + \vec{e}_\alpha \cos \vartheta \sin(2\omega t' - 2\alpha)].$$

Частота коливань розподілу заряду і струму та відповідно частота поля вдвічі перевищує частоту ω обертання кожного із зарядів по орбіті. Поляризація випромінювання — еліптична, що наближається до колової, якщо $\vartheta \rightarrow 0, \pi$, і переходить у лінійну, якщо $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{2e^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta); \quad \bar{I} = \frac{32}{5} \frac{e^2 a^4 \omega^6}{c^5}.$$

Якщо вилучити один із зарядів, то інтенсивність випромінювання зросте у $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2$ раз, тобто досить значно, оскільки виконується умова $\frac{a}{\lambda} \ll 1$.

6.9. За умови $l \ll \lambda$ обчислити векторний потенціал випромінювальної системи в хвильовій зоні з урахуванням членів порядку (l/λ^2) . Обчислити також інтенсивність випромінювання в припущенні $\ddot{\vec{p}} \neq 0, \ddot{\vec{m}} \neq 0, \ddot{Q}_{\alpha\beta} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь. } \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\dot{\vec{p}}}{cr} + \frac{\dot{\vec{m}} \times \vec{n}}{cr} + \frac{\ddot{Q}}{6c^2 r} + \frac{\vec{n}}{6c^2 r} \int r'^2 \ddot{\rho} dV' + \\ &+ \frac{1}{2c^3 r} \int \vec{r}' (\vec{n} \cdot \vec{r}')^2 \ddot{\rho} dV' - \frac{1}{c^3 r} \int \vec{r}' (\vec{n} \cdot \vec{r}') (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{j}}) dV'; \\ I &= \frac{2}{3c^3} (\ddot{\vec{p}}^2 + \ddot{\vec{m}}^2) + \frac{1}{180c^5} \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{15c^5} \ddot{\vec{p}} \cdot \ddot{\vec{L}}, \end{aligned}$$

де

$$\vec{L} = \int \dot{\rho} r'^2 \vec{r}' dV' + \int [r'^2 \ddot{\vec{j}} - 3\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \ddot{\vec{j}})] dV',$$

інші позначення загальноприйняті і всі величини, що залежать від часу, беруться у момент, який запізнюється, $t' = t - r/c$.

6.10. Знайти у векторній формі вирази для напруженостей електромагнітних полів електричного \vec{p} і магнітного \vec{m} дипольних осциляторів на відстанях від них, більших порівняно з їх розмірами.

Указівка. Під час диференціювання за \vec{r} урахувати, що дипольні моменти потрібно взяти в ретардирований момент $t' = t - r/c$ і, отже, залежать від r .

Відповідь. Поле магнітного диполя:

$$\vec{E}_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \dot{\vec{A}}_m = \frac{\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}(t')}{c^2 r} + \frac{\vec{n} \times \dot{\vec{m}}(t')}{c^2 r},$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}_m = \frac{3\vec{n}(\vec{m} \cdot \vec{n}) - \vec{m}}{r^3} + \frac{3\vec{n}(\dot{\vec{m}} \cdot \vec{n}) - \dot{\vec{m}}}{cr^2} + \frac{\vec{n} \times [\vec{n} \times \ddot{\vec{m}}]}{c^2 r}.$$

Поле електричного диполя можна отримати з поля магнітного диполя шляхом заміни $\vec{m} \rightarrow \vec{p}$, $\vec{H}_m \rightarrow \vec{E}_e$, $\vec{E}_m \rightarrow \vec{E}_e$.

6.11. Частинка із зарядом q рухається по колу радіуса a зі швидкістю v . Необхідно:

а) знайти скалярний потенціал φ у центрі кола в той момент, коли частинка перебуває у точці P ;

б) визначити векторний потенціал \vec{A} у центрі кола в цей момент.

Відповідь. Електричне і магнітне поля заряду, що рухається, описуються потенціалами Льєнара–Віхерта

$$\varphi = \frac{q}{\vec{R}' - (\vec{v}' \cdot \vec{R}')/c}, \quad \vec{A} = \frac{q\vec{v}'}{c[\vec{R}' - (\vec{v}' \cdot \vec{R}')/c]},$$

де \vec{R}' і \vec{v}' беруться для часу $t' = t - R'/c$.

а) Оскільки під час руху по колу в будь-який момент часу $\vec{v} \perp \vec{R}$, то в центрі кола маємо $\varphi = \frac{q}{a}$.

б) Аналогічно $\vec{A} = \frac{q\vec{v}'}{ca}$, де $v'[t'] = v[t - (a/c)]$.

Вважаючи момент часу, коли заряд перебуває у точці P , за початок відліку часу, знаходимо

$$v'_x = -v \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right); \quad v'_y = v \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

($\omega = v/a$), тобто

$$A_x = -\frac{qv}{ca} \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right); \quad A_y = \frac{qv}{ca} \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

6.12. Отримати вираз для потенціалів заряду, що рівномірно рухається, за допомогою релятивістського перетворення статичного кулонівського поля (потенціали Льєнара–Віхерта):

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c \left(R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c} \right)}; \quad \varphi = \frac{e}{R - \frac{\vec{v}\vec{R}}{c}},$$

де $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$; \vec{r} і $\vec{r}_0(t')$ — радіуси-вектори точки спостереження та положення заряду в момент випромінювання

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}.$$

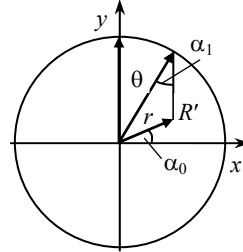


Рис. 6.2

6.13. Використовуючи потенціали Льєнара–Віхерта (задача 6.12), визначити напруженості електричного та магнітного полів заряду, що рухається.

$$\text{Відповідь: } \vec{E} = e \frac{\left(\vec{R} - R \frac{\vec{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^3} + \frac{e}{c} \frac{\left[\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R\vec{v}}{c} \right) \times \vec{v} \right] \right]}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c} \right)^3},$$

$$\vec{B} = \frac{[\vec{R} \times \vec{E}]}{Rc}.$$

6.14. Знайти закон перетворення компонент електричного та магнітного полів у вакуумі при переході до системи, що рухається зі швидкістю \vec{v} .

$$\text{Відповідь. } \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel};$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}, \vec{B}]}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}; \quad \vec{H}'_{\perp} = \frac{\vec{H}_{\perp} - [\vec{v}, \vec{E}]}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Розділ 7

ВИПРОМІНЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ

7.1. Дипольне, квадрупольне випромінювання

Дослідження випромінювання спрощується, коли час поширення електромагнітних збурень набагато менший від характерного часу T , пов'язаного з рухом заряджених частинок у системі:

$$l/c \ll T,$$

за періодичного руху T — це період;

$$l \ll \lambda,$$

де λ — довжина хвилі випромінювання:

$$v \ll c.$$

Розкладемо вираз (6.4) у ряд відповідно до розмірів системи.

Густина струму матиме вигляд:

$$\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c}\right) = \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \dot{\vec{j}}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}'}{c} + \dots$$

Електричне дипольне випромінювання

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV'$$

Використовуємо тотожність:

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \nabla'(\vec{a} \cdot \vec{r}') = \nabla' \cdot |\vec{j}(\vec{a} \cdot \vec{r}')| - \vec{a} \cdot \vec{r}'(\nabla' \cdot \vec{j}),$$

де \vec{a} — сталий вектор;

$$\vec{a} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV' = \vec{a} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{r}' \rho\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) dV';$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p}(t - r/c)}{cr}. \quad (7.1)$$

Інтенсивність випромінювання диполя буде мати вигляд

$$I = \frac{2\ddot{\vec{p}}^2}{3c^3},$$

де \vec{p} — дипольний момент системи в момент часу.

Для випромінювання однієї зарядженої частинки використовується формула Лармора

$$I = \frac{2e^2\dot{\vec{v}}^2}{3c^3},$$

де \vec{v} — швидкість частинки.

Відзначимо, що випромінювати може частинка, що рухається прискорено. Запишемо випромінювання для періодичного руху :

$$I_m = \frac{4\omega_m^4}{3c^3} |\vec{p}_m|^2.$$

Квадрупольне випромінювання

$$\vec{p} = \sum_a e_a \vec{r}_a = \eta \sum_a m_a \vec{r}_a = \eta \vec{R} \sum_a m_a,$$

де \vec{R} — радіус-вектор центра мас.

Диференціальна інтенсивність квадрупольного випромінювання

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\vec{m}} \times \vec{n}]^2 + \frac{1}{144\pi c^5} [\ddot{\vec{Q}} \times \vec{n}]^2 - \frac{1}{12\pi c^4} \ddot{\vec{m}} \cdot [\dot{\vec{Q}} \times \vec{n}].$$

Сумарна інтенсивність за всіма напрямками становить:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\vec{m}}^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{\vec{Q}}_{\alpha\beta}^2,$$

де $\vec{Q}_{\alpha\beta}$ — квадрупольний момент; \vec{Q} — згортка ($\vec{Q}_\alpha = \vec{Q}_{\alpha\beta} \cdot n_\beta$).

Вектор Герца і випромінювання антени. Вектор Герца пов'язаний з електромагнітним потенціалами співвідношеннями:

$$\varphi = -\text{div } \vec{Z}^{(e)}; \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}^{(e)}}{\partial t}.$$

Розподіл зарядів та струмів

$$\rho = -\text{div } \vec{P}; \quad \vec{j} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Загальний заряд дорівнює нулю:

$$q = \int_{V \rightarrow \infty} \rho dV = - \oint_{S \rightarrow \infty} \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Вектор Герца описується рівнянням Даламбера

$$\Delta \vec{Z}^{(e)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{Z}^{(e)}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{P}. \quad (7.3)$$

Розв'язок цього рівня:

$$\vec{Z}^{(e)}(\vec{r}, t) = \int \frac{\vec{P}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

* * *

Приклад 7.1. Частинка із зарядом e коливається вздовж осі Oz за законом $z(t) = a \sin \omega t$. Обчислити інтенсивності $dI_m/d\Omega$ випромінювання на кратних частотах $\omega_m = m\omega$, $m = 1, 2, \dots$, не припускаючи відношення a/λ малим.

Розв'язання. Використаємо розклад потенціалів у ряд Фур'є і обчислимо гармоніку Фур'є напруженості магнітного поля. Отримаємо

$$\vec{H}_m = i \frac{em\omega^2}{2\pi c^2} \frac{e^{i\vec{k}_m r}}{r} \int_0^T \vec{n} \times \vec{v}(\tau) \exp i(m\omega\tau - \vec{k}_m \cdot \vec{s}(\tau)) d\tau,$$

де $\vec{k}_m = m\omega\vec{n}/c$, $\vec{s}(\tau) = \vec{e}_z z(\tau)$. Інтеграл за часом виражається через функцію Бесселя.

У результаті маємо

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\vec{H}_m|^2 r^2 = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \text{tg}^2 \theta m^2 J_m^2(m\beta \cos \theta),$$

де $\beta = a\omega/c$, θ — кут між напрямком випромінювання n і віссю Oz .

Тут враховано, що гармоніки з номерами m і $-m$ роблять однаковий внесок у випромінювання.

Якщо $\beta \ll 1$, отримаємо

$$\frac{dI_m}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2 \theta$$

– дипольне випромінювання;

$$\frac{dI_2}{d\Omega} \approx \frac{e^2 a^4 \omega^6}{2\pi c^5} \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

– квадрупольне випромінювання, що містить порівняно з дипольним малий множник $(a\omega/c)^2$.

Приклад 7.2. У лінійній антені довжиною l збуджена стояча хвиля I з амплітудою I_0 , частотою ω і вузлами на кінцях антени. Число півхвиль струму, що укладаються на довжині антени, дорівнює m . Знайти кутовий розподіл випромінювання $\frac{dI}{d\Omega}$.

Розв'язання. Оберемо координатну систему, як показано на рис. 7.1. Розподіл струму в антені виражається формулою

$$I = I_0 \sin \left[k \left(\xi + \frac{l}{2} \right) \right] e^{-i\omega t},$$

$$\text{де } k = \frac{\omega}{c} = \frac{m\pi}{l}.$$

Електричний дипольний момент одиниці довжини антени $P = \frac{i}{\omega} I$, згідно з рівнянням (7.2). Елемент $d\xi$ антени можна розглядати як електричний дипольний осцилятор з моментом $dp = P d\xi$. Оскільки виконується нерівність $d\xi \ll \lambda$, то створене елементом $d\xi$ у точці A магнітне поле можна обчислити за формулою (7.1):

$$d\vec{H}_0(\vec{r}_0, t) = \frac{\omega^2}{c^2 r} \vec{e}_\alpha \sin \vartheta P \left(t - \frac{r}{c} \right) d\xi,$$

де

$$r = r_0 - \xi \cos \vartheta.$$

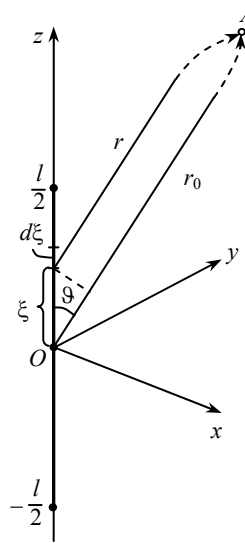


Рис. 7.1

Оскільки потрібно визначити лише поле у хвильовій зоні, то величину $\frac{\sin \vartheta}{r}$, котра мало змінюється в області $r \gg l$, можна винести з-під знака інтеграла.

Таким чином,

$$H_r = H_\vartheta = 0;$$

$$H_\alpha = -\frac{i\omega \sin \vartheta}{c^2 r_0} I_0 e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{ik\xi \cos \vartheta} \sin m\pi \left(\frac{\xi}{l} - \frac{1}{2} \right) d\xi.$$

Виконавши інтегрування, знайдемо кутовий розподіл за формулою $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \overline{H_\alpha^2} r_0^2$:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{I_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\cos^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta}, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ \frac{I_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \vartheta}, & \text{якщо } m \text{ парне.} \end{cases}$$

Характер кутового розподілу видно з полярних діаграм, зображених на рис. 7.2, штриховою лінією показано розподіл струму за довжиною антени, суцільною — кутовий розподіл випромінювання.

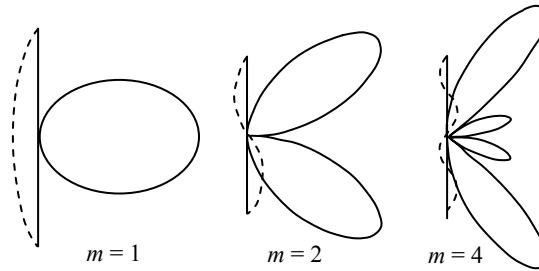


Рис. 7.2

Приклад 7.3. У коловій дротяній петлі довжиною l радіуса a збуджена стояча хвиля струму вигляду $I = I_0 \sin n\alpha' e^{-i\omega t}$. Визначити електро-магнітне поле \vec{H} , \vec{E} у хвильовій зоні.

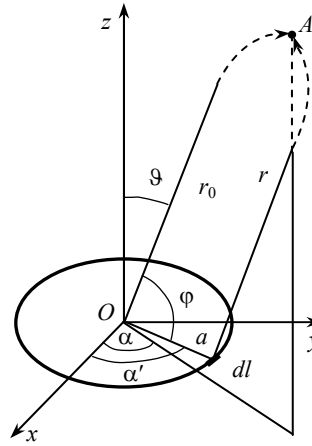


Рис. 7.3

Розв'язання. Якщо відстань r точки спостереження $A(r_0, \vartheta, \alpha)$ (рис. 7.3) від петлі велика ($r \gg a$), то можна вважати, що радіуси-вектори \vec{r} від усіх елементів кільця $d\vec{l}$ паралельні, причому

$$r_0 - a \cos \varphi = r_0 - a \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha).$$

Елемент $d\vec{l}$ має електричний дипольний момент $d\vec{p} = P d\vec{l} = \frac{i}{\omega} I d\vec{l}$, де P — електричний дипольний момент одиниці довжини дроту і створює в точці A магнітне поле:

$$d\vec{H}(\vec{r}_0, t) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{d\vec{p}(t') \vec{n}}{r} = -i \frac{\omega a I_0}{c^2 r_0} e^{-i\omega t + ikr_0 - iak \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)} \times \\ \times \sin n\alpha' [\cos(\alpha' - \alpha) \vec{e}_\vartheta + \cos \vartheta \sin(\alpha' - \alpha) \vec{e}_\alpha] d\alpha'. \quad (7.4)$$

У знаменнику виразу (7.4) нехтуємо величиною порядку a порівняно з r_0 .

Задача знаходження поля зводиться до інтегрування:

$$H_\vartheta = \frac{i\omega a I_0}{c^2 r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha' - \alpha) \sin n\alpha' e^{-ika \sin \vartheta \cos(\alpha' - \alpha)} d\alpha'.$$

Уведемо змінну інтегрування $\beta = \alpha' - \alpha$, отримаємо

$$H_\vartheta = -\frac{i\omega a I_0}{c^2 r_0} e^{i(kr_0 - \omega t)} \left(\cos n\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta \sin n\beta e^{-ika \sin \vartheta \cos \beta} d\beta + \right. \\ \left. + \sin n\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \cos \beta \cos n\beta e^{-ika \sin \vartheta \cos \beta} d\beta \right).$$

Перший з інтегралів перетворюється в нуль унаслідок непарності підінтегральної функції, другий може бути перетворений до проміжку $0, \pi$ (парна підінтегральна функція) і виражений через похідну від функції Бесселя.

Таким чином,

$$H_{\vartheta}(r_0, t) = -E_{\alpha} = \frac{2\pi\omega a I_0}{c^2 r_0} e^{i\left(kr_0 - \omega t - n\frac{\pi}{2}\right)} \sin n\alpha J'_n(ka \sin \vartheta).$$

Виконавши аналогічні обчислення з використанням формули $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$, отримаємо

$$H_{\alpha}(r_0, t) = E_{\vartheta} = \frac{2\pi\omega a I_0 e^{i\left(kr_0 - \omega t - n\frac{\pi}{2}\right)}}{c^2 r_0} \cos n\alpha \frac{J_n(ka \sin \vartheta)}{ka \operatorname{tg} \vartheta}.$$

Приклад 7.4. У лінійній антені (див. приклад 7.2) тече загальний струм

$$J = J_0 \sin[k_m(\xi + l/2)] e^{-\gamma t} \cos \omega_m t \Theta(t), \quad -l/2 \leq \xi \leq l/2,$$

де $\omega_m = ck_m = m\pi c/l$, Θ — ступенева функція; $m = 1, 2, \dots$ — число півхвиль, що укладаються на довжині антени.

Обчислити спектральну густину випромінювання $\frac{d^2 I_{\omega}}{d\omega d\Omega}$ у площині симетрії, перпендикулярній до осі антени.

Розв'язання. Уведемо електричний вектор Герца згідно з рівнянням (7.3) і обчислимо магнітне поле:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}^{(e)}}{\partial t} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \int \frac{\dot{\vec{P}}(\vec{r}', t - R/c)}{R} dV' = \\ &= \operatorname{rot} \frac{\vec{e}_z J_0}{c} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{R} \sin[k_m(\xi + l/2)] \cos \omega_m(t - R/c) \times \\ &\quad \times \exp[-\gamma(t - r/c)] d\xi. \end{aligned}$$

Користуючись рис. 7.1, знаходимо $R \approx r_0 - \xi \cos \vartheta \approx r_0$, оскільки у площині симетрії $\vartheta = \pi/2$. Обчислюючи інтеграл за $d\xi$, відмінний від нуля результат дістаємо тільки для непарних m . Після обчислення ротора й інтеграла Фур'є отримаємо для непарних значень m компоненту Фур'є магнітного поля

$$\vec{H}_\omega = \frac{J_0[\omega_m^2 + \gamma(i\omega - \gamma)]}{r_0 c^2 k_m [\omega_m^2 + (i\omega - \gamma)^2]} = [\vec{n}_0 \times \vec{e}_z] e^{i\omega r_0/c}$$

і спектральну густину випромінювання у площині симетрії $\vartheta = \pi/2$:

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{J_0^2 [(\omega_m^2 - \gamma^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]}{4\pi^2 c \omega_m^2 [(\omega_m^2 - \omega^2 + \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2]}.$$

За m парного спектральна густина випромінювання у площині симетрії перетворюється у нуль. Якщо $\gamma^2 \ll \omega_m^2$, спектр випромінювання має типову резонансну форму з гострим максимумом на частоті $\omega^2 = \omega_m^2 + \gamma^2$.

Приклад 7.5. Знайти вирази електричних дипольного \vec{Z}_p і квадрупольного \vec{Z}_Q , а також магнітного дипольного \vec{Z}_m членів розкладу електричного вектора Герца, справедливі за довільної залежності струмів та зарядів від часу. Вказані величини мають бути застосовні на відстанях $r \gg a, \lambda \gg a$ (виконання умови $r \gg \lambda$ не є обов'язковим). Тут a — розмір системи, верхній індекс (e) у вектора Герца випущений.

Розв'язання. Розкладемо вектор Герца $\vec{Z}(\vec{r}, t)$ на монохроматичні компоненти. Отримаємо

$$\vec{Z}_p(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p}(t')}{r},$$

де $t' = t - \frac{r}{c}$;

$$\begin{aligned}\vec{Z}_Q(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2r^2} \vec{Q}(t') + \frac{1}{2rc} \dot{\vec{Q}}(t'); \\ \vec{Z}_m(\vec{r}, t) &= \frac{\vec{m}(t') \times \vec{n}}{r} + \frac{c}{r^2} \left[\int \vec{m}(t') dt' \right] \vec{n}.\end{aligned}\quad (7.5)$$

Ці формули справедливі при $r \gg a$, де a — розмір системи. Довільна стала, що виникає при обчисленні інтеграла, який входить у (7.5), не позначається на величині напруженостей поля.

Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Електричний і магнітний диполі взаємно перпендикулярні, коливаються з частотою ω_0 і знаходяться в одному місці простору.

Знайти кутовий розподіл $\frac{dI}{d\Omega}$ і повну інтенсивність \bar{I} випромінювання, усереднені за часом.

Відповідь.

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\Omega} &= \frac{\omega_0^4}{4\pi c^3} \left\{ p^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) + m^2 \sin^2 \vartheta + mp \sin \vartheta \sin \alpha \right\}; \\ I &= \frac{2\omega_0^4}{3c^3} (p^2 + m^2).\end{aligned}$$

Тут використано систему координат, вісь x якої напрямлена вздовж \vec{p} , а вісь z — уздовж \vec{m} .

Усереднимо інтенсивності випромінювання за періодом коливання і отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{I}}{d\Omega} &= \frac{\omega_0^4}{8\pi c^3} \left\{ p_0^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \alpha) + m_0^2 \sin^2 \vartheta \right\}; \\ \bar{I} &= \frac{\omega_0^4}{3c^3} (p_0^2 + m_0^2).\end{aligned}$$

7.2. Рівномірно заряджена за об'ємом крапля пульсує з незмінною густиною. Поверхня краплі при цьому описується рівнянням

$$R(\vartheta) = R_0[1 + aP_2(\cos \vartheta)\cos \omega t],$$

де $a \ll 1$.

Заряд краплі q . Знайти кутовий розподіл $\frac{dI}{d\Omega}$ і повну інтенсивність \bar{I} випромінювання, усереднені за часом.

Відповідь.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{9}{800\pi} \frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta;$$

$$\bar{I} = \frac{3}{500} \frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}.$$

7.3. Знайти повне випромінювання \bar{I} та опір випромінювання $R = \frac{2\bar{I}}{I_0^2}$ антени, розглянутої в задачі 7.2.

Указівка. Результат виражається через інтегральний косинус

$$\text{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^{\pi} \frac{\cos t - 1}{t} dt,$$

де $C = 0,577$ — стала Ейлера.

Відповідь.

$$\bar{I} = \frac{I_0^2}{2c} [\ln(2\pi m) + C - \text{Ci}(2\pi m)];$$

$$R = 2 \frac{\bar{I}}{I_0^2} = \frac{1}{c} [\ln(2\pi m) + C - \text{Ci}(2\pi m)].$$

7.4. У лінійній антені довжиною l поширюється біжуча хвиля струму $I = I_0 e^{i(k\xi - \omega t)}$, де $k = \frac{\omega}{c}$; ξ — координата точки на антені.

Знайти кутовий розподіл $\frac{dI}{d\Omega}$ і повну інтенсивність \bar{I} випромінювання.

Відповідь.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 \vartheta \sin^2 \left[\frac{kl}{2} (1 - \cos \vartheta) \right]}{(1 - \cos \vartheta)^2},$$

$$\bar{I} = \frac{I_0^2}{c} \left[C - 1 + \ln \frac{4\pi l}{\lambda} - \text{Ci} \left(\frac{4\pi l}{\lambda} \right) + \frac{\sin \left(\frac{4\pi l}{\lambda} \right)}{\frac{4\pi l}{\lambda}} \right],$$

де $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ — довжина випромінювальної хвилі; ϑ — полярний кут, відлічуваний від координатної осі ξ .

Легко впевнитися, що біжуча хвиля випромінює інтенсивніше, ніж стояча хвиля з тими самими значеннями l, λ, I_0 .

7.5. У площині xz розташовано N антен, паралельних осі Ox , кожна довжиною l .

Відстань між сусідніми антенами a задано. У кожній антені тече струм $J = J_0 \sin k_m z \cos \omega_m t$. Знайти кутовий розподіл випромінювання $\frac{dI}{d\Omega}$, усереднений за часом.

Відповідь. Магнітне поле створюється N джерелами. Обчислимо його через вектор Герца і отримаємо

$$\vec{H}(\vec{r}_0, t) = -\text{Re} \left\{ i \frac{\vec{n}_0 \times \vec{e}_z J_0 k_m}{cr_0} \exp[i\omega_m(t - R/c)] \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{s=0}^{N-1} \exp[isk_m a \sin \vartheta \cos \varphi] \int_{-l/2}^{l/2} \sin[k_m(\xi + l/2)] \exp[ik_m \xi \cos \vartheta] d\xi \right\}.$$

Інтенсивність випромінювання, усереднена за часом, обчислюється за формулою

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{cr_0^2}{8\pi} |\vec{H}|^2 = \frac{J_0^2}{2\pi c \sin^2 \vartheta} \times$$

$$\times \frac{\sin^2 \left[\frac{N}{2} k_m a \sin \vartheta \cos \varphi \right]}{\sin^2 \left[\frac{1}{2} k_m a \sin \vartheta \cos \varphi \right]} \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \left[\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right], \\ \sin^2 \left[\frac{m\pi}{2} \cos \vartheta \right], \end{array} \right\}$$

де верхнє значення у фігурних дужках належить до m непарного, а нижнє — до m парного.

7.6. Обчислити потік вектора Пойнтінга $\vec{\gamma}$ через поверхню довгого прямолінійного дроту, опір одиниці довжини якого дорівнює R . Порівняти отриманий результат з омичними втратами.

Відповідь. Густина потоку енергії, що дорівнює модулю вектора Пойнтінга, дорівнює

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = (c^2/R) \vec{I} \times \vec{B}.$$

Потік енергії напрямлений нормально до поверхні дроту. Інтегруючи за поверхнею дроту одиничної довжини, знаходимо

$$\int \vec{\gamma} d\vec{s} = I^2 R.$$

Отже, потік вектора Пойнтінга через поверхню прямолінійного дроту дорівнює омичним втратам у цьому дроті.

7.7. Довгий коаксіальний кабель виготовлено з двох концентричних циліндрів, що ідеально проводять струм. Один кінець кабелю приєднаний до електричної батареї, напруга на клеммах якої дорівнює V . До другого кінця кабелю приєднаний опір R . Отже, струм, який протікає по кабелю, дорівнює $I = V/R$. За допомогою вектора Пойнтінга обчислити швидкість потоку енергії.

Відповідь.

$$|\vec{\gamma}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{IV}{2\pi r^2 \ln(b/a)};$$

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = V \frac{2}{16\pi r^2} \left[\frac{1}{\ln^2(b/a)} + \frac{1}{R^2 c^4} \right].$$

7.8. Плоска електромагнітна хвиля, падаючи на вільний електрон, змушує його осцилювати. Знайти відношення енергії, що випромінюється електроном за одиницю часу, до густини потоку енергії падаючої електромагнітної хвилі. Частота хвилі передбачається малою. Тому впливом магнітного поля \vec{B} хвилі на рух електрона можна знехтувати.

Відповідь. Розділивши потік на густину енергії падаючої хвилі $J = \varepsilon_0 c E^2$, отримаємо диференціальний переріз розсіяння електромагнітної хвилі електроном

$$d\sigma = \frac{dJ}{J} = \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Повний переріз розсіяння

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2.$$

7.9. На повний тороїд, середній радіус якого дорівнює R , а радіус поперечного перерізу r ($r \ll R$), намотано N витків дроту. У момент часу $t = 0$ по дроту пропускається струм, сила якого зростає з часом за лінійним законом

$$I(t) = Kt.$$

а) Знайти магнітне поле і енергію, запасену в тороїді до моменту часу t .

б) Знайти напрямок і величину вектора Пойнтінга у будь-якій внутрішній точці тороїда у момент часу t .

Відповідь. а) $B = -\frac{2NKt}{c^2 R}$; $E = -\frac{\rho NK}{c^2 R}$,

$$w = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) dV = \frac{\pi r^2}{c^2} \frac{N^2 K^2 t^2}{R} + \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{NK}{c^2 R} \right)^2 \pi r^5.$$

б) Напрямки \vec{E} та \vec{B} такі, що вектор Пойнтінга $\vec{\gamma}$ у кожній точці на поверхні тороїда нормальний до поверхні і напрямлений всередину тороїда. Крім того, $\vec{E} \perp \vec{B}$ у кожній точці. Отже, модуль вектора Пойнтінга становить

$$\vec{\gamma} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{2rt}{c^4 R^2} (NK)^2.$$

Повна потужність енергії, що поглинається,

$$\oint \vec{\gamma} d\sigma = \frac{2\pi r^2 t (NK)^2}{c^4 R}.$$

7.10. Показати, що дипольне випромінювання під час зіткнення двох однакових частинок, не виникає.

Відповідь. У системі центра інерції дипольний момент системи

$$\vec{p} = e_1 \vec{r}_1 + e_2 \vec{r}_2 = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) r,$$

де μ — зведена маса; r — відносна координата частинок; m_1 і m_2 — маси частинок.

Для однакових частинок $e_1 = e_2$, $m_1 = m_2$, тоді $\vec{p} = 0$ і, отже, не виникає дипольного випромінювання, пропорційне $|\ddot{\vec{p}}|^2$.

7.11. Знайти інтенсивність випромінювання частинки маси m , що рухається по коловій орбіті радіуса a під дією кулонівських сил. Відповідь виразити через енергію частинки.

Відповідь.

$$J = \frac{e^6}{2c^3 a^4 m^2} = \frac{|\varepsilon|^4}{3m^2 c^3 e^2},$$

де ε — енергія частинки.

7.12. Знайти ефективний переріз розсіяння еліптично поляризованої хвилі з частотою ω осцилятором, маса якого m , заряд e , власна частота ω_0 , коефіцієнт загасання γ .

Відповідь. Еліптично поляризовану хвилю запишемо так:

$$\vec{E} = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t ,$$

де $\vec{A} \perp \vec{B}$.

Тоді диференціальний ефективний переріз розсіяння дорівнює

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \frac{[\vec{A}\vec{n}]^2 + [\vec{B}\vec{n}]^2}{A^2 + B^2} d\Omega ,$$

де \vec{n} — одиничний вектор у напрямку розсіяння.

7.13. Диполь з моментом \vec{p} , що міститься на початку координат, коливається з частотою ω . У точці з радіусом-вектором \vec{d} ($\vec{d} \perp \vec{p}$) перебуває частинка, поляризованість якої β . Знайти інтенсивність випромінювання електромагнітних хвиль такою системою, припускаючи, що $d \ll \lambda$, де λ — довжина хвилі випромінювання.

Відповідь.
$$j = \frac{p^2 \omega^4}{c^3} \left(1 - \frac{\beta}{4\pi d^3} \right)^2 .$$

7.14. Заряджена частинка гальмується в середовищі силою, пропорційною швидкості руху частинки. Знайти енергію, що випромінюється частинкою за одиницю часу в одиницю тілесного кута. Початкова швидкість руху \vec{v}_0 .

Відповідь.
$$\frac{dJ(\omega)}{d\Omega} = \frac{e^2 \vec{v}_0^2}{c^3} \frac{k^2}{k^2 + \omega^2} \sin^2 \vartheta .$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ландау Л. Д.* Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1967. — 504 с.
2. *Ландау Л. Д.* Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1982. — 621 с.
3. *Левич В. Г.* Курс теоретической физики / В. Г. Левич. — М. : Физматгиз, 1962. — Т. 1. — 695 с.
4. *Зоммерфельд А.* Электродинамика / А. Зоммерфельд. — М. : Иностран. лит., 1958. — 502 с.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества / И. Е. Тамм. — М. : Наука, 1966. — 504 с.
6. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности / А. Эйнштейн. — М. : Иностран. лит., 1955. — 160 с.
7. *Батыгин В. В.* Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. — М. : Наука, 1970. — 503 с.
8. *Сборник задач по теоретической физике* / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. — К. : Высш. шк., 1984. — 319 с.
9. *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и приведений / И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.
10. *Прудников А. П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : Наука, 1981. — 664 с.

Навчальне видання

ДЖЕЖЕРЯ Юрій Іванович
КРУЧИНІН Сергій Павлович
РЕШЕТНЯК Сергій Олександрович
КЛИМУК Олена Сергіївна

ТЕОРІЯ ПОЛЯ

Розв'язання задач

Навчальний посібник

Редактор *Р. М. Шульженко*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *Л. М. Романова*
Комп'ютерна верстка *Л. Т. Колодіної*

Підп. до друку 24.02.2015. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 8,14. Обл.-вид. арк. 8,75.
Тираж 100 пр. Замовлення № 13-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002

Для нотаток
