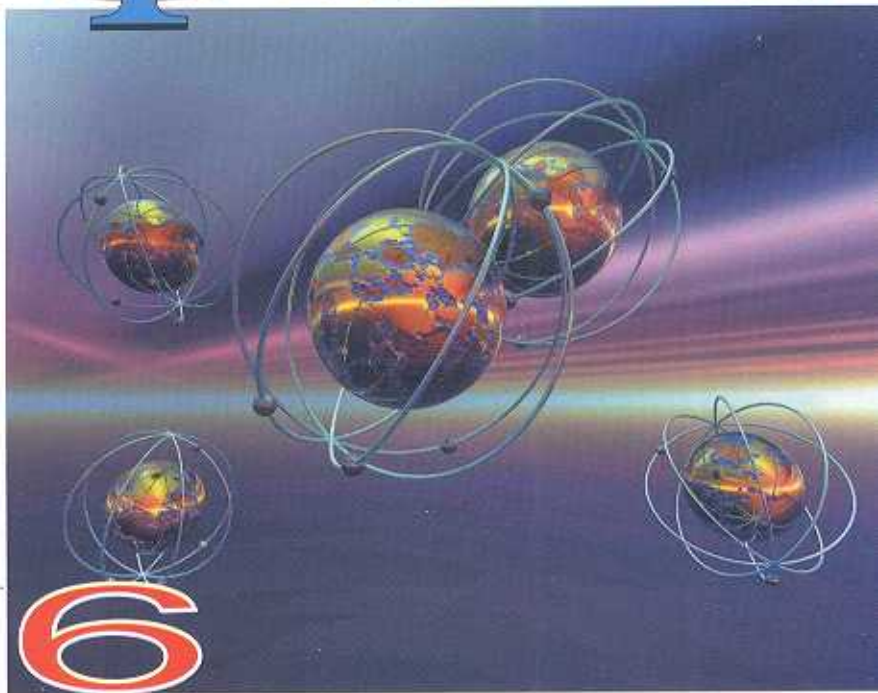




МОДУЛЬНЕ НАВЧАННЯ

Фізика



6

МОДУЛЬ

ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ
ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ



$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Фізика

Модуль 6

Вступ до квантової та атомної фізики

Навчальний посібник

*За загальною редакцією
професора А. П. Поліщука*

Київ 2015

УДК 530.145(075.8)
ББК В 3я7
Ф 503

Автори:

**А. П. Поліщук, Г. Б. Бордюг, О. В. Грідякіна,
С. П. Кручинін, І. А. Сліпухіна**

Рецензенти:

В. Г. Литовченко — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Інститут фізики напівпровідників НАН України);

А. К. Прикарпатський — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Дрогобицький державний університет
імені Івана Франка);

В. О. Голуб — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний авіаційний університет)

*Рекомендовано до друку вченою радою Національного
авіаційного університету (протокол № 2 від 18.03.2015).*

Фізика. Модуль 6. Вступ до квантової та атомної фізики :
Ф 503 навч. посібник / А. П. Поліщук, Г. Б. Бордюг, О. В. Грідякіна
[та ін.]; за заг. ред. проф. А. П. Поліщука. — К. : НАУ, 2015. —
240 с.

ISBN 978-966-598-936-3

Навчальний посібник є продовженням серії «Модульне навчання. Фізика», яка започаткована та апробована на кафедрі загальної фізики НАУ.

Навчальний матеріал модуля 6 «Вступ до квантової та атомної фізики» структурований і систематизований згідно з кредитно-модульною системою та відповідає навчальним програмам з підготовки фахівців рівня бакалавр. Навчальні елементи містять теоретичне ядро, задачі для аудиторної й індивідуальної роботи, а також лабораторний практикум. Запитання для самоперевірки допоможуть студентам під час підготовки їх до рейтингового контролю.

Для студентів усіх технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

**УДК 530.145(075.8)
ББК В 3я7**

ISBN 978-966-598-936-3

© Поліщук А. П., Бордюг Г. Б., Грідякіна О. В.,
Кручинін С. П., Сліпухіна І. А., 2015
© НАУ, 2015

ВСТУП

1. Загальні відомості про зміст

У цьому посібнику подано шостий модуль «Вступ до квантової та атомної фізики» дисципліни «Фізика». Його мета – допомогти студентам оволодіти фундаментальними знаннями з основ квантової механіки й атомної фізики. Матеріал посібника, наскільки можливо, викладено з мінімальним використанням математичних формул. Головну увагу приділено розкриттю фізичного змісту передусім тих явищ, у яких наочно проявляються суперечності із законами класичної фізики. При цьому необхідно розуміти, що квантові закони мають універсальний характер, проте квантові ефекти в класичній фізиці надто малі.

Моделі, якими оперує квантова фізика, у більшості випадків позбавлені наочності, що призводить до певних труднощів у їх розумінні, тому в посібнику достатньо уваги приділяється аналізу експериментальних результатів, числовим розрахункам, що показують, за яких умов виникають ефекти квантування, а за яких ними можна знехтувати.

У матеріалі посібника використовується система СІ, а також гауссова система одиниць та несистемні одиниці (наприклад, ангстрем \AA), які традиційно застосовуються в атомній фізиці, фізиці твердого тіла, ядра й елементарних частинок.

У результаті вивчення матеріалу модуля студенти мають *знати* закони теплового випромінювання, основи квантової оптики – фотоефект, ефект Комптона, світловий тиск, закономірності будови атомів та їх спектральні характеристики, хвильові властивості частинок, поняття про квантову механіку — хвильова функція та її фізичний зміст, співвідношення невизначеності Вернера Гейзенберга, рівняння Ервіна Шредінгера, частинка в потенціальній ямі, квантовий гармонічний осцилятор, квантування атомів та їх магнітні властивості.

Студенти повинні *вміти* використовувати методи експериментальних і теоретичних досліджень квантової механіки та атомної фізики, будувати графіки, визначати похибки фізичних

вимірювань, використовувати здобуті знання для розв'язання практичних задач.

2. Структура модуля М6

Модуль «Вступ до квантової та атомної фізики» складається з навчальних елементів (НЕ), а саме:

НЕ-1 — Квантові властивості електромагнітного випромінювання.

НЕ-2 — Атом Резерфорда — Бора.

НЕ-3 — Елементи нерелятивістської квантової механіки.

НЕ-4 — Квантування атомів.

НЕ-5 — Атоми в магнітних полях. Лазери.

НЕ-6 — Лабораторні роботи.

НЕ-7 — Індивідуальні завдання.

НЕ-8 — Таблиці довідок.

Навчальні елементи НЕ-1 — НЕ-5 складаються з теоретичного ядра і прикладів розв'язання задач.

У навчальному елементі НЕ-6 подано опис лабораторних робіт, які виконуються в цьому розділі фізики, та інструкції до їх виконання.

Навчальний елемент НЕ-7 містить задачі для виконання індивідуальних домашніх завдань, а елемент НЕ-8 — таблиці довідок, у тому числі таблицю, у якій наведено співвідношення між одиницями вимірювання фізичних величин у СІ і в гауссовій системі.

3. Вступ до розділу «Вступ до квантової та атомної фізики»

У розділі «Вступ до квантової та атомної фізики» вивчаються явища, в основу яких покладено поняття «*рухома матерія*» — речовини і поля, яким притаманні одночасно корпускулярні (дискретні) та хвильові (неперервні) властивості.

У навчальному елементі НЕ-1 розглянуто суперечності між закономірностями випромінювання абсолютно чорного тіла і класичною фізикою, а також їх розв'язання на основі квантової гіпотези Планка; закономірності фотоефекту і їх пояснення теорією Ейнштейна; поняття про фотони, тиск і корпускулярне розсіяння світла.

Теорію моделі атома водню Резерфорда–Бора та її дослідне підтвердження розглянуто у навчальному елементі НЕ–2.

У навчальному елементі НЕ–3 проаналізовано гіпотезу де-Бройля щодо хвильових властивостей речовини та її експериментальне підтвердження; розглянуто співвідношення невизначеностей для координат та імпульсів, для часу й енергії; наведено визначення хвильової функції та розглянуто рівняння Шредінгера; досліджено найпростіші випадки руху мікрочастинок.

Питання відбору (квантування) значень моменту імпульсу, енергії та магнітного моменту електрона розглянуто у навчальному елементі НЕ–4. Проаналізовано тонку структуру спектрів воднеподібних атомів і розподіл електронів по оболонках відповідно до принципу Паулі; розкрито природу характеристичного рентгенівського випромінювання.

У навчальному елементі НЕ–5 проведено аналіз ефекту Зеємана, його наслідків і застосування, а також будову, принцип дії і застосування лазерів.

Навчальний елемент 1

КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

До середини XIX ст. хвильова природа світла вважалась доведеною остаточно. Зокрема, її підтверджували явища інтерференції та дифракції світла. Проте саме в цей час виникли задачі, розв'язати які в межах електромагнітної теорії виявилось неможливим. Уперше це сталося, коли спробували кількісно описати явище рівноважного теплового випромінювання. Наполегливі спроби вирішити цю проблему в межах хвильових уявлень за допомогою класичної електродинаміки і статистики не мали успіху. Для пояснення теплового випромінювання мусили ввести гіпотезу про *кванти* світла. Це було початком руйнування класичних і становлення принципово нових *квантових уявлень*.

Розглянемо експериментальні факти, які свідчать про корпускулярно-квантову (корпускула від лат. *corpusculum* — дуже мала частинка речовини) природу світла.

1.1. Теплове випромінювання

Світіння розжарених тіл — найпоширеніший вид електромагнітного випромінювання, зумовлене кількістю наданої тілу теплоти. Таке світіння характеризується *суцільним (неперервним) спектром* і називається *тепловим або температурним випромінюванням*. Як і всі інші види випромінювання, теплове випромінювання виникає внаслідок переходів атомів (молекул) зі станів з більшою енергією в стани з меншою енергією. Відмінність полягає лише в способі переходу випромінювальної системи у збуджений стан.

У теплових явищах такий перехід здійснюється завдяки тепловому руху атомів (молекул), тобто за рахунок внутрішньої енергії тіла.

Теплове випромінювання займає особливе місце, оскільки *це єдиний вид випромінювання, який може перебувати в термодинамічній рівновазі з іншими випромінювальними тілами.*

Світіння, викликані іншими видами енергії (хімічною, електричною, світловою тощо), крім внутрішньої (теплової), об'єднуються під загальною навою *люмінесценція*. Люмінесценція — *нерівноважний* вид випромінювання.

Густина випромінювання. Усі тіла випромінюють, поглинають і відбивають електромагнітні хвилі, але не однаково. Інтенсивність цих процесів залежить від властивостей тіл, їх температури та частоти електромагнітних хвиль. Електромагнітне випромінювання у вакуумі ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$) характеризують повною об'ємною густиною енергії випромінювання

$$w = \epsilon_0 E^2 / 2 + \mu_0 H^2 / 2, \quad (1.1)$$

яка певним чином розподілена за частотами.

Розподіл випромінювання за частотами описують *спектральною густиною випромінювання*

$$w_\omega = dw / d\omega, \quad (1.2)$$

звідки випливає

$$w(T) = \int_0^\infty w_\omega(T) d\omega. \quad (1.3)$$

Індекси ω і T указують на залежність спектральної густини від частоти і температури $w_\omega = w_\omega(T)$, а повної густини лише від температури $w = w(T)$.

Уявімо, що кілька тіл, нагрітих до різних температур, розміщені в порожнині, внутрішні стінки якої характеризуються ідеальним відбиванням світла — замкнена адіабатна оболонка. Навіть якщо в порожнині буде абсолютний вакуум, тіла будуть обмінюватись між собою енергією завдяки випромінюванню. Хоча випромінювання кожного тіла залежить виключно від його власної температури, а не від температури оточуючих тіл (закон Прево), більш нагріті тіла будуть охолоджуватися, оскільки вони випромінюють більше енергії, ніж її отримують від оточуючих тіл, а менш нагріті — нагріватися, тому що вони отримують більше енергії, ніж її віддають.

Досліди показують, що зрештою в порожнині обов'язково встановиться термодинамічна рівновага. Усі тіла матимуть однакову температуру і поглинатимуть за одиницю часу стільки енергії, скільки її випромінюватимуть. При цьому густина випромінювання в просторі між тілами досягне певної величини $w(T)$, що відповідає усталеній температурі. Таку густину називають *рівноважною*.

Розглянемо порожнину, внутрішні стінки якої не є ідеально дзеркальними; температура стінок підтримується сталою. Очевидно, що за умови $T = \text{const}$ у середині цієї порожнини також установиться рівноважне випромінювання.

Збуджені за рахунок енергії теплового руху атоми стінок, повертаючись у незбуджений стан, випромінюватимуть променеву енергію, яка заповнюватиме простір у порожнині. Частково ця енергія відбиватиметься від стінок, а частково поглинатиметься цими самими стінками.

Унаслідок таких процесів відбуватиметься хаотична зміна напрямку поширення світла, його спектрального складу, поляризації та інтенсивності випромінювання.

Отже, в порожнині існуватиме *усталений хаотичний стан випромінювання, ймовірність якого максимальна*. Як відомо, стан, що характеризується найбільшою ймовірністю, називають рівноважним (див. модуль 2 «Молекулярна фізика й термодинаміка», підрозд. 5.2.2. і 5.2.3).

Рівноважне випромінювання має такі властивості: *густина променевої енергії, її розподіл за частотами (за довжинами хвиль), напрям поширення, а також поляризація випромінювання зовсім не залежать від форми і речовини стінок порожнини*. Ці властивості, подібно до стану газу в посудині, зумовлюються *лише температурою стінок порожнини*.

Рівноважне випромінювання однорідне, його густина однакова в усіх точках порожнини. Воно ізотропне і неполяризоване, тобто всі напрями поширення випромінювання в порожнині рівно-ймовірні, а напрями векторів електромагнітного поля \vec{E} і \vec{H} у кожній точці порожнини змінюються з часом хаотично.

1.1.1. Закон Кірхгофа

Перший вагомий крок у дослідженні властивостей рівноважного випромінювання був зроблений Густавом Кірхгофом, який, виходячи з термодинамічних міркувань, показав, що *рівноважна спектральна густина $w_{\omega}(T)$ залежить лише від частоти ω і температури T і зовсім не залежить від природи та властивостей тіл, що містяться в порожнині, а також стінок самої порожнини.*

Справедливість цього твердження впливає з другого принципу термодинаміки. Уявімо, що $w_{\omega}(T)$ залежить від природи та властивостей стінок самої порожнини і тіл, розміщених у ній. Візьмемо дві різні порожнини, що мають однакову температуру. За припущенням густини в порожнинах різні. З'єднаємо порожнини за допомогою невеликого отвору, через який випромінювання з однієї порожнини може потрапляти в іншу, і навпаки. Унаслідок різних $w_{\omega}(T)$ між порожнинами відбуватиметься обмін енергією випромінювання. Одна з порожнин почне нагріватися, друга — охолоджуватися. Проте дві порожнини, початкові температури яких однакові, не можуть за рахунок теплообміну досягти різних температур — це забороняє другий принцип термодинаміки.

Теплове випромінювання характеризують *енергетичною світністю* — потік енергії, або, що те саме, потужність, яку випромінює тіло за даної температури з одиниці поверхні ($M = dP/dS$) в усьому інтервалі частот і за всіма напрямками в межах тілесного кута 2π , тобто всередину півсфери (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 1.2). Енергетична світність є функцією температури $M = M(T)$; розмірність цієї величини — Вт/м².

Теплове випромінювання складається з різних частот ω , тому випромінювання певної ділянки спектра характеризують *спектральною густиною енергетичної світності*

$$M_{\omega} = dM / d\omega, \quad (1.4)$$

де dM — енергетична світність, що припадає на інтервал частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Зрозуміло, що

$$dM = M_{\omega} d\omega. \quad (1.5)$$

Спектральна густина енергетичної світності характеризує випромінювання тільки певної частоти, тому вона є функцією як частоти, так і температури $M_\omega = M_\omega(T)$; її розмірність — $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}) = \text{Дж}/\text{м}^2$. Цю величину використовують для характеристики випромінювальної здатності тіла, тому надалі називатимемо її *випромінювальною здатністю тіла*. Енергетична світність (або повна випромінювальна здатність) за всіма частотами визначається інтегралом

$$M(T) = \int dM = \int_0^\infty M_\omega(T) d\omega. \quad (1.6)$$

Якщо на тіло падає випромінювання, то частина його неминуче відбивається, решта проникає всередину тіла. Енергія, що потрапила всередину тіла, частково поглинається, перетворюючись у тепло, а частково після одного або кількох відбивань усередині тіла знову виходить назовні. Частину від усієї падаючої енергії, що залишається всередині тіла і перетворюється в тепло, називають *поглинальною здатністю* тіла:

$$A_\omega = \frac{dW'_\omega / dt}{dW_\omega / dt}. \quad (1.7)$$

Тут dW'_ω / dt — енергія, поглинута ділянкою поверхні тіла за одиницю часу в інтервалі частот від ω до $\omega + d\omega$; dW_ω / dt — повна енергія випромінювання, що ізотропно падає за одиницю часу на ту саму ділянку поверхні в тому самому інтервалі частот.

Безрозмірна величина A_ω залежить від частоти і температури, тобто спектральна поглинальна здатність є функцією частоти і температури $A_\omega = A_\omega(T)$. Аналогічно до поглинальної здатності вводять поняття *відбивальної здатності* тіла $R_\omega = R_\omega(T)$. Очевидно, що для непрозорих тіл $R_\omega(T) + A_\omega(T) = 1$.

У 1859 р. Густав Кірхгоф установив важливе співвідношення:

$$\frac{M_\omega(T)}{A_\omega(T)} = \frac{c}{4} w_\omega(T) = f_\omega(T) \quad (1.8)$$

(множник $c/4$ враховує зв'язок густини енергії з густиною потоку енергії в разі їх ізотропного розподілу; c — швидкість світла у вакуумі).

Оскільки рівноважна спектральна густина випромінювання $w_{\omega}(T)$ не залежить від природи і властивостей тіл, то співвідношення (1.8) означає, що в стані рівноваги відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності однакове для всіх тіл і є універсальною функцією лише частоти та температури — закон Кірхгофа. Цей закон є кількісним узагальненням емпіричного правила Прево (1809) — якщо поглинальні здатності тіл різні, то різними будуть і їх випромінювальні здатності.

Із закону Кірхгофа випливає важливий висновок: *будь-яке тіло за даної температури випромінює переважно промені тих частот (довжин хвиль), які воно за тієї самої температури найбільше поглинає.* При цьому, якщо відома універсальна функція

$f_{\omega}(T) = \frac{c}{4} w_{\omega}(T)$ і поглинальна здатність $A_{\omega}(T)$, то можна визначити випромінювальну здатність тіла $M_{\omega}(T)$, а отже, і його енергетичну світність $M(T)$.

1.1.2. Випромінювання абсолютно чорного тіла

Згідно із законом Кірхгофа (1.8) випромінювальна здатність тіла тим більша, чим більша його поглинальна здатність. Серед усіх тіл однакової температури максимальне випромінювання матиме тіло, поглинальна здатність якого дорівнює одиниці $A_{\omega}(T) = 1$. За такої умови вираз (1.8) набуває вигляду

$$M_{\omega}(T) = \frac{c}{4} w_{\omega}(T) = f_{\omega}(T). \quad (1.9)$$

Тіло, яке за будь-якої температури повністю поглинає падаюче на нього випромінювання всіх частот (довжин хвиль), Г. Кірхгоф назвав *абсолютно чорним*. Очевидно, що абсолютно чорне тіло не відбиває ($R_{\omega}(T) = 0$), а лише поглинає і випромінює світло (не

плутати випромінювання променів з їх відбиванням). Усі інші тіла, для яких $A_{\omega}(T) = \text{const} < 1$, називають *сірими*.

Згідно з виразом (1.9) випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла дорівнює $f_{\omega}(T) = \frac{c}{4} w_{\omega}(T)$, тобто *універсальна функція Кірхгофа* $f_{\omega}(T)$ є не що інше, як *випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла*. Отже, із введенням поняття абсолютно чорного тіла задача знаходження $f_{\omega}(T) = \frac{c}{4} w_{\omega}(T)$ звелася до визначення закону випромінювання абсолютно чорного тіла.

Абсолютно чорних тіл у природі не існує. Сажа чи платинова чернь мають поглинальну здатність, близьку до одиниці лише в обмеженому інтервалі частот; у далекій інфрачервоній ділянці частот їх поглинальна здатність помітно менша за одиницю. Проте можна виготовити абсолютно чорне тіло у вигляді непрозорої порожнини з малим отвором (рис. 1.1). Промені, потрапляючи крізь отвір всередину порожнини, завдяки багаторазовому відбиванню та поглинанню на внутрішніх стінах порожнини майже повністю поглинатимуться і вкрай мало виходитимуть з отвору назовні. Саме з цієї причини в сонячний день відкриті вікна в будинку здаються темними, роль порожнин виконують кімнати в будинку.

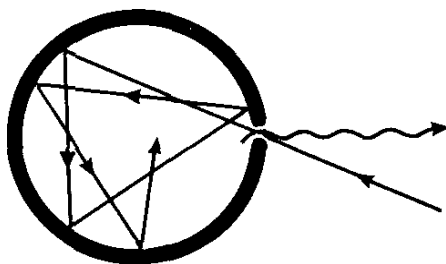


Рис. 1.1

Отже, якщо стінки порожнини мають сталу температуру T , то з отвору виходитиме випромінювання, дуже близьке за спектральним складом до випромінювання абсолютно чорного тіла у вигляді площинки тієї ж форми та розмірів, що й отвір в порожнині і за тієї самої температури T .

За допомогою моделі чорного тіла були експериментально досліджені закони теплового випромінювання. Криві розподілу енергії в спектрі абсолютно чорного тіла для різних температур зображено на рис. 1.2.

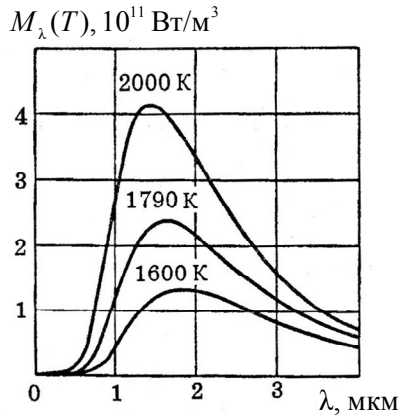


Рис. 1.2

Зауважимо, що в експериментах зручніше працювати з довжинами хвиль, ніж з частотами. Тому для розрахунку за шкалою довжин хвиль необхідно перейти від функції $w_\omega(T)$ до $w_\lambda(T)$. Для цього слід брати до уваги, що енергія однієї й тієї самої ділянки спектра не залежить від вибору одиниці вимірювання, тобто чи це частотний інтервал $(\omega, \omega + d\omega)$, чи відповідний інтервал довжин хвиль $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Отже, має виконуватись умова $|w_\omega d\omega| = |w_\lambda d\lambda|$, за якої з урахуванням співвідношень $\omega = 2\pi c/\lambda$; $|d\omega| = 2\pi c|d\lambda|/\lambda^2$ дістаємо $w_\lambda(T) = w_\omega d\omega/d\lambda = 2\pi c w_\omega(T)/\lambda^2$. Очевидно, що аналогічне співвідношення виконується між функціями $f_\lambda(T) = 2\pi c f_\omega(T)/\lambda^2$, а оскільки для абсолютно чорного тіла $M_\omega(T) = f_\omega(T)$ (див. вираз (1.9)), то $M_\lambda(T) = f_\lambda(T) = 2\pi c M_\omega(T)/\lambda^2$ (щоб дістати конкретний вигляд функції $M_\lambda(T)$, слід у функції $M_\omega(T)$ частоту ω замінити на $2\pi c/\lambda$ і отриманий результат помножити на $2\pi c/\lambda^2$).

Із рис. 1.2 видно, що енергетична світність абсолютно чорного тіла $M(T)$ (площа під кривою) суттєво збільшується з підвищенням температури, при цьому максимум випромінювальної здатності з підвищенням температури зсувається в бік коротких хвиль, Наголосимо, що видимий діапазон довжин хвиль 0,4–0,76 мкм займає незначну частину площі під кривими (приблизно 3–5%), ще меншу частину площі займає ультрафіолетове випромінювання. *Основна частина площі припадає на невидимі інфрачервоні промені.*

Класична фізика виявилась не спроможною пояснити експериментальні криві, зображені на рис. 1.2. Окремі випадки для досить малих частот (відповідно великих довжин хвиль) були теоретично обґрунтовані формулами Релея–Джинса, а для великих частот (відповідно малих довжин хвиль) — формулою Віна. Загальна формула для всього діапазону частот (довжин хвиль) була знайдена Максом Планком. Із цього почався розвиток квантової теорії.

1.1.3. Стаціонарне електромагнітне поле в порожнині як сукупність стоячих хвиль

Джерелом теплового випромінювання порожнини зі сталою температурою є її стінки. Вони складаються з атомів або молекул твердого тіла. У класичній електромагнітній теорії світла (електронна теорія Лоренца) випромінювальні атоми розглядаються як елементарні лінійні осцилятори (вібратори). Осцилятори, посилаючи променеву енергію всередину порожнини, одночасно й поглинають її, оскільки існує поглинання світла стінками порожнини, тобто осцилятори одночасно є і резонаторами. У разі сталої температури порожнини величина енергії, що випромінюється осциляторами (стінками порожнини) за одиницю часу, дорівнює енергії, яка поглинається цими ж осциляторами (стінками). Отже, у порожнині встановлюється рівноважний стан з однорідним розподілом енергії та зі стаціонарним електромагнітним полем в об'ємі порожнини.

Рівноважне випромінювання в порожнині не залежить від її форми і матеріалу стінок, тому можна припустити, що порожнина має форму куба з ідеально дзеркальними стінками. Стаціонарне електромагнітне хвильове поле в порожнині можна розглядати як

сукупність стоячих хвиль, утворених при дзеркальному відбиванні променів від стінок порожнини. Розрахуємо кількість стоячих хвиль у порожнині.

Спочатку розглянемо дві дзеркальні плоскі поверхні, розміщені паралельно одна одній на відстані l . Очевидно, що паралельний пучок променів, який поширюється перпендикулярно від однієї з поверхонь, відбившись від іншої поверхні, рухатиметься у зворотному напрямі. За рахунок інтерференції прямої та відбитої біжучих хвиль утворюватиметься стояча хвиля. При цьому на дзеркальних поверхнях розміщуватимуться вузли електричного поля та пучності магнітного поля. Проте в обох випадках умовою існування стоячих хвиль є укладання на довжині l цілої кількості половинок хвиль: $l = n\lambda/2$, де n — будь-яке ціле додатне число. Очевидно, що у загальному випадку, коли кут падіння з нормаллю до площини становить ϑ , то $l \cos \vartheta = n\lambda/2$.

Нехай порожнина у формі куба має ребро довжиною l . Три взаємно перпендикулярні ребра куба доцільно брати за вісі координат. Виникнення стоячих хвиль у кубічній порожнині визначатиметься трьома умовами:

$$l \cos \alpha = n_1 \lambda / 2 ; l \cos \beta = n_2 \lambda / 2 ; l \cos \gamma = n_3 \lambda / 2 , \quad (1.10)$$

де α , β , γ — кути, що визначають напрям поширення світлового променя відносно координатних осей.

Як і раніше, n_1 , n_2 , n_3 — цілі додатні числа, кожній трійці яких відповідає одна система стоячих хвиль.

В ортогональній системі координат косинуси кутів пов'язані між собою відомим співвідношенням:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 .$$

Підставляючи в це рівняння значення косинусів з виразу (1.10), дістаємо

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 4l^2 / \lambda^2 . \quad (1.11)$$

Умова (1.11) є рівнянням сфери з радіусом $R = \frac{2l}{\lambda}$.

Оскільки $v\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\lambda = c$, де c — швидкість поширення хвиль у порожнині (у вакуумі), то радіус сфери можна подати у вигляді

$$R = \frac{l\omega}{\pi c}. \quad (1.12)$$

Об'єднавши вирази (1.11) і (1.12), дістанемо:

$$\omega = \frac{\pi c}{l} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (1.13)$$

Із формули (1.13) видно, що кожній трійці чисел n_1, n_2, n_3 відповідає своя частота ω . Очевидно, що всім цілим числам n_1, n_2, n_3 , сума квадратів яких стала, відповідають однакові частоти. Проте однакові частоти належать до *різних систем стоячих хвиль, оскільки останні мають різні напрями*.

Отже, однаковим між собою частотам відповідають різні точки у просторі.

Підрахуємо кількість стоячих хвиль в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Неважко здогадатися, що ця кількість дорівнюватиме кількості точок, що потрапляють у сферичний прошарок розмірами від R до $R + dR$, тобто у сферичний прошарок завтовшки dR (рис. 1.3).

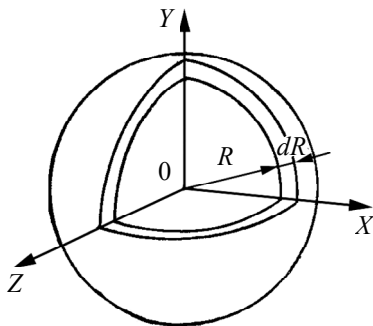


Рис. 1.3

Об'єм сферичного прошарку $4\pi R^2 dR$, але n_1, n_2, n_3 — цілі додатні числа, що містяться в додатному октанті координатної системи, тому шуканий об'єм становитиме лише $1/8$ від об'єму сферичного прошарку — $4\pi R^2 dR/8$. Вважатимемо, що точка займає одиницю об'єму, тоді кількість точок дорівнюватиме об'єму сферичного прошарку в октанті:

$$dN_{\omega} = \frac{1}{8} 4\pi R^2 dR. \quad (1.14)$$

Згідно з виразом (1.12) $R = \frac{l\omega}{\pi c}$, звідки $dR = \frac{l d\omega}{\pi c}$, тоді вираз

(1.14) набуває вигляду

$$dN_{\omega} = \frac{\omega^2 l^3 d\omega}{2\pi^2 c^3},$$

а кількість стоячих хвиль в одиниці об'єму:

$$\frac{dN_{\omega}}{l^3} = \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}. \quad (1.15)$$

Теплове випромінювання — природне світло (некогерентне, неполяризоване). Його можна уявити як накладання двох некогерентних хвиль, поляризованих у взаємно перпендикулярних площинах, які мають однакову середню інтенсивність (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 4.1). Отже, неполяризований промінь щодо перенесення енергії еквівалентний двом променям, поляризованим у взаємно перпендикулярних площинах, тому повна концентрація стоячих хвиль має бути вдвічі більшою:

$$dn_{\omega} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (1.16)$$

Кожну зі стоячих хвиль називають *моддою коливань*, а кількість мод (1.16) дорівнює *кількості степенів вільності коливальної системи*. Якщо $\langle \varepsilon \rangle$ — середня енергія коливання, що припадає на один степінь вільності, то густина енергії стоячих хвиль для інтервалу частот $d\omega$ дорівнює:

$$w_{\omega}(T) d\omega = dn_{\omega} \cdot \langle \varepsilon \rangle = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle \varepsilon \rangle d\omega, \quad (1.17)$$

звідки

$$w_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle \varepsilon \rangle. \quad (1.18)$$

Отже, знаходження $w_{\omega}(T)$ звелось до визначення середньої енергії моди коливань.

1.1.4. Формула Релея–Джинса

Джон Уільям Релей і Джеймс Джинс застосували до рівноважного випромінювання в порожнині закон рівномірного розподілу енергії за степенями вільності.

Відповідно до цього закону в рівноважному стані на кожний степінь вільності припадає в середньому кінетична енергія $kT/2$. Але слід врахувати, що коливальний рух гармонічного осцилятора (випромінювальний атом) пов'язаний з наявністю як кінетичної, так і потенціальної енергій.

Отже, маємо взяти суму двох енергій, тобто середнє значення *повної енергії*.

Оскільки для гармонічного осцилятора середня кінетична енергія дорівнює середній потенціальній енергії (див. модуль 4 «Колівання і хвилі», підрозд. 1.5), то на кожний коливальний степінь вільності припадає енергія kT .

Той самий результат дістанемо, якщо взяти до уваги, що енергія електромагнітного поля стоячих хвиль складається із середніх енергій електричного і магнітного полів, кожна з яких окремо дорівнює $kT/2$.

Отже, якщо $\langle \varepsilon \rangle = kT$, то спектральна густина енергії в порожнині:

$$w_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT. \quad (1.19)$$

Співвідношення (1.19) називають *формулою Релея–Джинса*. Як видно з рис. 1.4, формула (1.19) задовільно описує дослідні криві лише для великих λ (малих ω), для всіх інших довжин хвиль (частот) вона абсолютно не придатна.

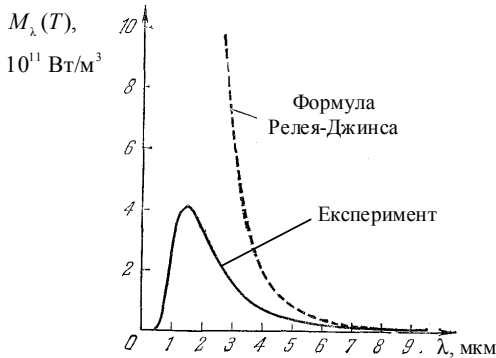


Рис. 1.4

Більше того, інтегрування виразу (1.19) дає для повної густини $w(T)$ випромінювання нескінчену величину

$$w(T) = \int_0^{\infty} w_{\omega}(T) d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega = \infty. \quad (1.20)$$

Цей абсурдний результат, зі слів Пауля Еренфеста, дістав назву «ультрафіолетова катастрофа».

За класичними законами фізики виведення формули Релея–Джинса є бездоганим, оскільки воно базується на чітко встановлених законах термодинаміки. Тому суттєва розбіжність теорії з експериментом вказує на принципові проблеми класичної фізики.

1.1.5. Формула Віна

Вільгельм Він висунув припущення, що кожна мода коливань є носієм енергії $\varepsilon(\omega)$, але не всі моди певної частоти збуджені. Відносна кількість збуджених мод підлягає розподілу Больцмана, отже ймовірність, що збуджена мода має енергію $\varepsilon(\omega)$

$$\Delta N / N = e^{-\varepsilon/kT}. \quad (1.21)$$

Звідси дістаємо середнє значення енергії, що припадає на моди з частотою ω :

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon(\omega) \Delta N / N = \varepsilon(\omega) e^{-\varepsilon/kT}. \quad (1.22)$$

Із загальних термодинамічних міркувань Він дійшов висновку, що енергія моди пропорційна частоті $\varepsilon(\omega) = \hbar\omega$. Коефіцієнт пропорційності тут подано у сучасному вигляді через сталу Планка, яка на той час була невідома. Формула (1.18) з урахуванням (1.22) набуває вигляду

$$w_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (1.23)$$

Співвідношення (1.23) називають *формулою Віна*. На відміну від формули Релея–Джинса формула Віна дає максимум і добре описує експеримент на ділянці досить великих частот (малих λ). Якщо взяти спектр сонячного випромінювання, то за допомогою формули Релея–Джинса вдається правильно описати лише частоти, набагато менші за тих, на які припадає максимум густини випромінювання, а за допомогою формули Віна — тільки великі частоти. Проміжну ділянку частот задовільно описати не вдається.

Отже, наприкінці XIX ст. існували дві формули, кожна з яких відповідала експериментальним даним в обмеженій частині спектра. Жодна з них не описувала всю експериментальну криву, зображену на рис. 1.2.

1.1.6. Формула Планка

У 1900 р. Макс Планку вдалося знайти вигляд функції $w_{\omega}(T)$, що відповідає дослідним даним у всьому спектрі частот. Для цього йому довелося висунути припущення, не сумісне з уявленнями класичної фізики, а саме: лінійні осцилятори (атоми, що випромінюють) *випромінюють енергію не безперервно, а у вигляді окремих порцій — квантів, величина яких пропорційна частоті випромінювання*

$$\varepsilon = h\nu \equiv \hbar\omega. \quad (1.24)$$

Коефіцієнт пропорційності h (або \hbar) згодом отримав назву сталої Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с ($\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с).

Отже, осцилятор може мати не довільні значення енергії, а лише дискретні $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$, $3\hbar\omega$, ..., $n\hbar\omega$, де n ціле число ($n = 0, 1, 3, \dots$).

Зауважимо, що h (\hbar) надто мала величина, тому дискретність випромінювання непомітна в макроскопічних явищах.

Розглянемо ансамбль з N осциляторів, коливання яких квантуються. У стані рівноваги розподіл коливань за енергіями підлягає розподілу Больцмана. Оскільки енергія осцилятора може набути лише *дискретних значень*, то розподіл Больцмана має вигляд

$$N_n = A \exp(-\varepsilon_n / kT), \quad (1.25)$$

де N_n — кількість осциляторів, що мають енергію $\varepsilon_n = n\hbar\omega$; A — коефіцієнт пропорційності, який повинен задовольняти умову

$$\sum_n N_n = A \sum_n \exp(-\varepsilon_n / kT) = N. \quad (1.26)$$

Підставивши знайдене із виразу(1.26) значення A у формулу (1.25), дістанемо розподіл Больцмана для випадку дискретних значень енергій

$$N_n = \frac{N \exp(-\varepsilon_n / kT)}{\sum_n \exp(-\varepsilon_n / kT)}. \quad (1.27)$$

Імовірність, що осцилятор за частоти ω має енергію ε_n , така:

$$P_n = \frac{N_n}{N} = \frac{\exp(-\varepsilon_n / kT)}{\sum_n \exp(-\varepsilon_n / kT)}. \quad (1.28)$$

Знаючи P_n , можна знайти середнє значення енергії осцилятора $\langle \varepsilon \rangle = \sum_n P_n \varepsilon_n$, а саме:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \exp(-n\hbar\omega / kT)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\hbar\omega / kT)}. \quad (1.29)$$

Для полегшення розрахунків уведемо позначення $x = \hbar\omega / kT$, тоді формула (1.29) матиме вигляд

$$\langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}. \quad (1.30)$$

У виразі (1.30) знаменник являє собою нескінченну спадну геометричну прогресію, перший доданок якої $a_1 = 1$, а знаменник $q = e^{-x}$. Як відомо, сума всіх членів цієї прогресії дорівнює $s = \frac{a_1}{1-q}$. Тому

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-x}}. \quad (1.31)$$

Чисельник у формулі (1.30) дорівнює похідній знаменника за x , взятої з протилежним знаком

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}. \quad (1.32)$$

Підставляючи вирази (1.31) і (1.32) у формулу (1.30) і враховуючи, що $x = \hbar\omega / kT$, дістаємо кінцевий вираз для середньої енергії осцилятора

$$\langle \varepsilon \rangle = \hbar\omega \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^x - 1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (1.33)$$

Згідно з виразом (1.33) різним частотам відповідає різна середня енергія і в загальному випадку вона не дорівнює kT , як це було за класичною фізикою.

Перемноживши вирази $dn_{\omega} = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ [див. (1.16) і (1.33)],

дістанемо густину енергії, що припадає на інтервал частот $d\omega$:

$$\omega_{\omega} d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (1.34)$$

Звідси знаходимо спектральну густину енергії теплового випромінювання

$$w_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (1.35)$$

або з урахуванням співвідношення $f_{\omega}(T) = \frac{c}{4} w_{\omega}(T)$ функцію Кірхгофа, тобто спектральну випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла:

$$f_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (1.36)$$

Вирази (1.35) і (1.36) називають *формулою Планка*. Вона правильно описує випромінювання абсолютно чорного тіла в усьому інтервалі частот від 0 до ∞ . Зокрема, для великих частот (або низьких температур) $\hbar\omega \gg kT$ формула (1.35) перетворюється у формулу Віна (1.23)

$$w_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT},$$

а у випадку малих частот (або високих температур) $\hbar\omega \ll kT$ — у формулу Релея–Джинса. Дійсно, за умови $\hbar\omega \ll kT$ експоненту можна розкласти в ряд, обмежившись двома доданками $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT$. У результаті формула Планка перетворюється у формулу Релея–Джинса (1.19):

$$w_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT.$$

1.1.7. Закони теплового випромінювання абсолютно чорного тіла

Оскільки формула Планка отримана на основі аналізу розподілу енергії в спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла, то з неї мають впливати добре відомі закони цього випромінювання, а саме закон Стефана–Больцмана і закон Віна.

Закон Стефана–Больцмана. Енергетична світність абсолютно чорного тіла дорівнює

$$M^*(T) = \int_0^{\infty} f_{\omega}(T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \quad (1.37)$$

(зірочка вказує на те, що йдеться про випромінювання саме абсолютно чорного тіла). Увівши безрозмірну змінну інтегрування $x = \hbar\omega / kT$, переходимо до виразу

$$M^*(T) = \frac{k^4 T^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (1.38)$$

Визначений інтеграл у виразі (1.38) відомий. Він дорівнює $\pi^4 / 15 \approx 6,5$. Підставивши його значення, дістанемо закон Стефана–Больцмана:

$$M^*(T) = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4, \quad (1.39)$$

де $\sigma = \sigma_{\text{теор}} = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5,67032 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

Розраховане значення сталої $\sigma_{\text{теор}}$ добре узгоджується з експериментальною величиною $\sigma_{\text{експ}} = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$. Використовуючи $\sigma_{\text{експ}}$, М. Планк уперше оцінив значення сталої \hbar , яка потім уточнювалась з інших дослідів, зокрема, явища фотоефекту, короткохвильової межі гальмівного рентгенівського випромінювання.

Закон зміщення Віна. Положення максимуму залежить від шкали, за якої визначається спектральна густина. Урахувавши співвідношення між функціями $w_{\lambda}(T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} w_{\omega}(T)$ і вираз (1.35), запишемо функцію $w_{\lambda}(T)$ за шкалою довжин хвиль у вигляді

$$w_{\lambda}(T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} w_{\omega}(T) = \frac{16\pi^2 \hbar c}{\lambda^5 (\exp[2\pi c \hbar / \lambda k T] - 1)} \quad (1.40)$$

(у функції $w_\omega(T)$ частоту ω замінено на $2\pi c/\lambda$ і отриманий результат помножено на $2\pi c/\lambda^2$).

Для знаходження максимуму спектральної густини випромінювання необхідно розв'язати рівняння:

$$\frac{dw_\lambda(T)}{d\lambda} = \frac{16\pi^2\hbar c \left\{ \frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT} \exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right) - 5 \left[\exp\left(\frac{2\pi c\hbar}{\lambda kT}\right) - 1 \right] \right\}}{\lambda^5 [\exp[2\pi c\hbar/\lambda kT] - 1]^2} = 0.$$

Значення λ_{\max} , за якого функція $w_\lambda(T)$ досягає максимуму, знаходимо, дорівнявши вираз у фігурних дужках до нуля. Позначимо $x = 2\pi c\hbar/\lambda_{\max} kT$, тоді дістанемо трансцендентне рівняння

$$xe^x - 5(e^x - 1) = 0,$$

розв'язання якого методом послідовних наближень або графічно дає $x = 4,965$. Тоді λ_{\max} можна визначити зі співвідношення

$$T\lambda_{\max} = b = \frac{2\pi c\hbar}{4,965k} = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}, \quad (1.41)$$

яке називають *законом зміщення Віна*. Теоретичне значення сталої $b_{\text{теор}} = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ збігається з його експериментальним значенням $b_{\text{експ}} = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$

Приклад зміщення максимуму залежно від вибору шкали. Із формули (1.41) для λ_{\max} у спектрі випромінювання Сонця ($T = 6000 \text{ К}$) дістаємо значення, близьке до 550 нм . Для знаходження максимуму *за частотною шкалою* потрібно замість рівняння $dw_\lambda(T)/d\lambda = 0$ розв'язати рівняння $dw_\omega(T)/d\omega = 0$. У результаті для спектра випромінювання Сонця для частоти ω_{\max} отримуємо значення, близьке до $2,1 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$, що відповідає довжині хвилі 880 нм .

Вимірювання температури. Закони Віна і Стефана–Больцмана широко використовують для вимірювання високих температур оптичним методом, зокрема в астрофізиці для визначення

температур зірок, у тому числі й Сонця. Для цього, наприклад, експериментальну криву розподілу енергії в спектрі Сонця порівнюють з кривими абсолютно чорного тіла для різних температур (див. рис. 1.2). Виявляється, що найбільша схожість між кривими, де збігаються положення максимумів, спостерігається для абсолютно чорного тіла, температура якого $T = 6000 \text{ К}$. Цю температуру розглядають як деяку ефективну температуру сонячної поверхні. З іншого боку, можна скористатися законом Стефана–Больцмана. Вимірюючи кількість променевої енергії Сонця, що падає на верхню межу земної атмосфери ($1,33 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$), і знаючи відстань до Сонця та його площу (тобто величину випромінюваної поверхні), легко розрахувати загальну кількість енергії, випромінюваної з одиниці поверхні Сонця. Якщо вважати, що Сонце випромінює, як абсолютно чорне тіло, то виходячи зі закону Стефана–Больцмана, знаходимо дещо інше значення ефективної температури поверхні Сонця — 5750 К . Близькі значення цих температур свідчать, що випромінювання Сонця значною мірою відповідає випромінюванню абсолютно чорного тіла.

Аналіз формули Планка показав, що вона правильно описує експериментальні криві абсолютно чорного тіла у всьому інтервалі частот і температур. Тому гіпотезу Планка щодо квантування енергії можна вважати експериментально обґрунтованою.

1.2. Фотоефект. Формула Ейнштейна

Генеруючи електромагнітні хвилі (збуджуючи електричні коливання) у відкритому контурі з розрядником, Генріх Герц (1887) помітив, що довжина іскри між металевими електродами розрядника збільшується, якщо катод опромінювати ультрафіолетовим світлом. Отже, падаюче на негативний електрод (катод) ультрафіолетове світло сприяє виникненню іскри в просторі між електродами. Це спостереження започаткувало експериментальні роботи Вільгельма Хальвакса, Олександра Столетова, Філіпа Ленарда та інші, в яких було з'ясовано сутність цього явища та встановлено його головні характеристики.

Експериментальні факти. Сутність явища, виявленого Герцом, полягає в такому. При освітленні ультрафіолетовими променями негативно заряджені металеві тіла втрачають негативний заряд. У разі освітлення цими же променями позитивно зарядженого тіла втрати електричного заряду не спостерігається. Крім того, якщо освітлювати незаряджене тіло, то воно заряджається позитивно до потенціалу в кілька вольтів. Усі ці експериментальні факти свідчать, що *опромінені тіла втрачають негативний заряд*. У 1900 р. Ф. Ленард і Дж. Томсон, вимірявши питомий заряд звільнених під дією світла частинок, установили, що падаюче на катод *ультрафіолетове випромінювання вибиває з матеріалу катода електрони*.

Явище звільнення електронів з речовини під дією світла називають фотоелектричним ефектом або просто фотоефектом, а звільнені електрони — фотоелектронами. Розрізняють зовнішній і внутрішній фотоефекти. У разі *зовнішнього фотоефекту* електрони покидають поверхневий шар речовини, переходячи в інше середовище, зокрема у вакуум. У разі *внутрішнього фотоефекту* відбувається перерозподіл електронів за енергетичними станами, при цьому вони залишаються всередині речовини, не порушуючи її електронейтральності.

Крім металів, фотоелектричні властивості притаманні також діелектрикам, напівпровідникам та електролітам. Необхідною (але недостатньою) умовою фотоефекту є помітне поглинання світла поверхневим шаром опромінюваної речовини. Установлено, що фотоефект спостерігається не тільки в разі опромінення речовини ультрафіолетовими променями, а й *м'яким рентгенівським випромінюванням*. Лужні метали — літій, натрій, калій, рубідій, цезій доволі чутливі до фотоелектричної дії *видимої частини спектра*, а спеціальне оброблення поверхонь цих металів робить їх здатними випромінювати фотоелектрони навіть під дією *інфрачервоних променів*.

Схему установки для дослідження зовнішнього фотоефекту, в якій електроди (катод *K* і анод *A*) розміщені у вакуумному балоні, показано на рис. 1.5, *a*. Монохроматичне ультрафіолетове світло, проходячи крізь кварцове віконце (на відміну від звичайного скла, кварц пропускає ультрафіолетові промені), падає на катод, виготовлений з досліджуваного металу. Електрони, звільнені

внаслідок фотоэффекту, під дією електричного поля між катодом і анодом, рухаються до анода, створюючи фотострум, який вимірюється гальванометром G . Напругу між катодом і анодом можна змінювати за допомогою потенціометра Π . Графік залежності фотоструму I від напруги між електродами U — вольт-амперну характеристику — зображено на рис. 1.5, б.

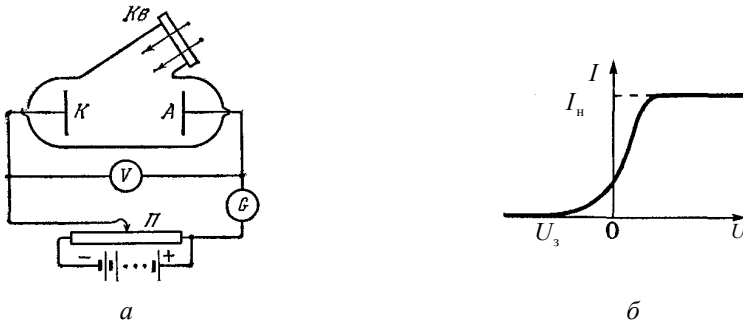


Рис. 1.5

Із рис. 1.5, б видно, що за деякої невеликої прискорювальної напруги фотострум досягає насичення (I_n) — усі фотоелектрони, випромінєні катодом, потрапляють на анод. Отже, сила струму насичення визначається кількістю електронів, звільнених з катода за одиницю часу під дією світла.

Ліворуч від ділянки насичення положистий хід кривої вказує, що електрони вилітають з катода з різними швидкостями і не всі вони досягають анода. Така поведінка зумовлена тим, що світло може звільнити електрони не лише із самої поверхні катода, а і з деякої глибини. Виходячи назовні, ці електрони внаслідок випадкових зіткнень усередині металу втрачають частину наданої їм світлом кінетичної енергії.

Звернімо увагу, що на положистій ділянці кривої фотострум існує навіть за умови $U \leq 0$. Для припинення фотоструму необхідно прикласти напругу затримки $U_3 < 0$, величина якої, як з'ясувалося, не залежить від інтенсивності падаючого світла. Якщо $U = U_3$, жодному фотоелектрону, навіть тому, що має максимальну швидкість, не вдається подолати поле затримки й долетіти до анода. Тому можна записати, що

$$\frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = eU_3, \quad (1.42)$$

де m_e — маса спокою електрона; e — його заряд.

Отже, вимірявши U_3 , можна визначити максимальну швидкість фотоелектронів.

Узагальнюючи дослідні дані, наведемо головні закономірності фотоелектру:

а) у разі сталої частоти (довжини хвилі) світла фотострум насичення прямо пропорційний світловому потоку, що падає на катод (О. Столетов, 1888). Це означає, що кількість електронів, звільнених світлом за одиницю часу, пропорційна величині світлового потоку;

б) для кожного металу за певного стану його поверхні існує мінімальна частота ω_{\min} (або максимальна довжина хвилі λ_{\max}), нижче від якої фотоелектр не виникає. Цю характерну для кожного металу величину називають *червоною межею* фотоелектру;

в) електрони залишають поверхню катода з енергіями від нуля до $m_e v_{\max}^2 / 2$. Остання лінійно зростає зі збільшенням частоти випромінювання ω і не залежить від його інтенсивності (Ф. Ленард, 1902);

г) фотоелектр — явище з дуже малим часом запізнення. Вимірювання свідчать, що проміжок часу між початком опромінення катода та появою фотоструму не перевищує 10^{-9} с.

Суперечності законів фотоелектру уявленням класичної фізики. Із погляду класичної хвильової теорії сам факт звільнення електронів з металу не є дивним, оскільки електромагнітна хвиля викликає вимушені коливання електронів. Електричний вектор \vec{E} падаючої хвилі надає прискорення електронам, завдяки чому вільні електрони в металі починають «розгойдуватися», амплітуда їх вимушених коливань зростає. Енергія коливання пропорційна амплітуді в квадраті, тому за досить великої амплітуди коливання електрон може подолати потенціальний бар'єр, що утримує його в металі, і вийти назовні.

Однак пояснити кількісні закономірності фотоелектру виявилось неможливо. Коливальний електрон отримує енергію від світлової

хвилі, то здавалось би, що кінетична енергія звільненого електрона має зростати зі збільшенням амплітуди, а отже, інтенсивності падаючого світла. Але досліди Ф. Ленарда показали, що *максимальна швидкість, з якою вилітають електрони, зовсім не залежить від інтенсивності падаючого світла*; збільшення інтенсивності приводить лише до зростання кількості фотоелектронів (сили фотоструму).

Також хвильова теорія не спромоглася пояснити дуже малий час запізнення в явищі фотоефекту. За малої інтенсивності падаючої хвилі коливальному електрону потрібен певний час, щоб накопичити енергію, необхідну для звільнення. Отже, за класичною теорією фотоефект має відбуватися з помітним запізненням, а досліди свідчать, що він майже *безінерційний* — фотострум з'являється одночасно з опроміненням катода. Фотоеlementи, що широко використовуються в техніці, завдячують саме цій корисній властивості фотоефекту.

Формула Ейнштейна. У 1905 р. А. Ейнштейн показав, що всі закономірності фотоефекту легко пояснити, якщо припустити, що світло поглинається тими самими порціями $h\nu$, якими воно, за припущенням Планка, випромінюється.

Згідно з гіпотезою Ейнштейна в разі поглинання фотона його енергія *повністю передається одному електрону*. Отже, вільний електрон в металі отримує енергію не поступово, а миттєво. Цим і пояснюється безінерційність фотоефекту.

Зауважимо, що реально *вільний електрон* може тільки розсіювати, але не поглинати або випромінювати фотон (у разі поглинання або випромінювання фотона *абсолютно вільним електроном* не виконуються одночасно закони збереження енергії й імпульсу).

Непорозуміння виникає через невдалу термінологію для електронів провідності в металі — «вільні електрони». Електрони провідності взаємодіють як між собою, так і з катіонами кристалічної ґратки металу.

Отже, вони *не є абсолютно вільними* і тому можуть повністю поглинути всю енергію фотона. Якщо ця енергія досить велика, то електрон здатен подолати потенціальний бар'єр, що утримує його в металі, і вийти назовні. Очевидно, що в цьому процесі виконуватиметься закон збереження енергії

$$\hbar\omega = m_e v_{\max}^2 / 2 + A, \quad (1.43)$$

де A — робота виходу з металу (кілька електрон-вольтів), тобто *найменша* енергія, яку необхідно надати електрону для його звільнення; $m_e v_{\max}^2 / 2 = W_{\max} = eU_3$ — *максимальна кінетична енергія фотоелектронів*, які переважно утворюються біля поверхні металу на глибині, що не перевищує 10 \AA .

Співвідношення (1.43) називають *формулою Ейнштейна*.

Формула Ейнштейна (1.43) повністю пояснює всі особливості фотоэффекту.

1. Максимальна кінетична енергія, зумовлена максимальною швидкістю фотоелектронів, лінійно залежить від частоти падаючого світла і зовсім не залежить від його інтенсивності. Тангенс кута нахилу прямої на графіку $W_{\max} = W_{\max}(\omega)$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dW_{\max}}{d\omega} = \hbar \text{ дозволяє визначити величину сталої Планка. За}$$

нахилом відповідних прямих для міді, магнію, алюмінію, натрію Роберт Міллікен (1916) розрахував сталу Планка. Виявилося, що вона збігається зі значенням, знайденим зі спектрального розподілу рівноважного теплового випромінювання та короткохвильової межі гальмівного рентгенівського випромінювання (див. підрозд. 1.3).

2. Існує мінімальна частота ω_{\min} (максимальна довжина хвилі λ_{\max}), нижче від якої фотоэффект не спостерігається. Ця частота згідно з формулою (1.43) відповідає рівності $\hbar\omega_{\min} = A$. Якщо $\omega < \omega_{\min}$ ($\lambda > \lambda_{\max}$), то енергії фотона недостатньо для звільнення електрона з металу, тобто подолання фотоелектроном потенціального бар'єра «висотою» A . На цьому ґрунтується один з методів визначення роботи виходу електронів з металу.

Частоті ω_{\min} відповідає червона межа фотоэффекту, довжина хвилі якої $\lambda_{\max} = 2\pi c / \omega_{\min}$.

Назва не стосується кольору світла. Вона лише вказує на ту найменшу частоту (найбільшу довжину хвилі) світла, за якої ще може спостерігатися фотоэффект.

Зокрема, для цезію $\lambda_{\max} = 0,65$ мкм (видиме світло), а для платини $\lambda_{\max} = 0,20$ мкм (ультрафіолетове світло).

3. Теорія Ейнштейна досить просто пояснює пропорційність між силою фотоструму насичення та світловим потоком Φ (або інтенсивністю) падаючого світла. Оскільки світловий потік визначається кількістю квантів світла, падаючих на поверхню катода за одиницю часу, то кількість звільнених фотоелектронів має бути пропорційною кількості поглинутих фотонів, тобто потоку падаючого світла (закон Столетова). Відповідно до цього і струм насичення також пропорційний падаючому світловому потоку:

$$I_{\text{н}} \sim \Phi. \quad (1.44)$$

Зауважимо, що фотоэффект — явище рідкісне. Лише мала частина квантів передає свою енергію фотоелектронам. Енергія решти квантів витрачається на зміну внутрішньої енергії тіла, тобто на його нагрівання.

Розглянуте явище фотоэффекту відбувається в разі слабких світлових полів. За таких полів імовірність поглинання двох фотонів одним електроном надто мала, тому процес поглинання електроном тільки одного фотона називають *однофотонним*.

Багатофотонні процеси стали можливими з винаходом лазерів, які генерують великі потужності світлових пучків. Використання лазерів дало змогу спостерігати багатофотонний фотоэффект, за якого фотоелектрон отримує енергію від N фотонів ($N = 2 - 5$).

Рівняння Ейнштейна для багатофотонного фотоэффекту має вигляд

$$N\hbar\omega = m_e v_{\max}^2 / 2 + A. \quad (1.45)$$

Відповідно червона межа фотоэффекту зміщується в бік малих частот (великих довжин хвиль, λ_{\max} збільшується в N разів). Формула (1.44) для багатофотонного ефекту набуває вигляду

$$I_{\text{н}} \sim \Phi^N. \quad (1.46)$$

1.3. Гальмівне рентгенівське випромінювання

Вважають, що рентгенівське випромінювання було відкрите Вільгельмом Рентгеном (1895), за що він перший з фізиків отримав Нобелівську премію (1905). Природа випромінювання була невідомою, і В. Рентген назвав його Х-променями. Пізніше це випромінювання почали називати його ім'ям. Зауважимо, що задовго до відкриття В. Рентгена перші фотознімки за допомогою невідомих променів були зроблені нашим співвітчизником Іваном Пулюєм. Для цього він сконструював так звану «лампу Пулюя» — прототип сучасних рентгенівських трубок, яка в 1881 р. на Міжнародній електротехнічній виставці в Парижі отримала срібну медаль і згодом виготовлялася в заводських умовах серійно.

У 1912 р. Макс Теодор Лауе, Дюрренмат Фрідріх і Пауль Кніппінг уперше одержали *дифракцію рентгенівських променів* на монокристалічному зразку мідного купоросу ($\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$), що остаточно й однозначно вказувало на їх *хвильову природу* (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 3.7). Отже, рентгенівські промені мають таку саму електромагнітну природу, як і видиме світло, але відрізняються від нього значно меншими довжинами хвиль. Дифракція на кристалах вказує, що їх довжини хвиль зрівнянні зі сталими кристалічними ґраток $d \sim 0,5$ нм (для порівняння довжина хвиль видимого світа становить $\lambda \sim 500$ нм). У шкалі довжин хвиль рентгенівське випромінювання зайняло місце між ультрафіолетовим світлом і гамма-випромінюванням (приблизний інтервал рентгенівських променів становить від 10 до 0,01 нм).

Природними джерелами рентгенівського випромінювання є сонячна корона та радіоактивні елементи. Місяць, гальмуючи потік протонів (особливо в період активного Сонця) також сприяє виникненню рентгенівського випромінювання.

Згідно з класичною електродинамікою будь-який заряд, що рухається з прискоренням, випромінює електромагнітні хвилі. Потужність випромінювання пропорційна квадрату заряду і квадрату прискорення $P \sim q^2 a^2$ (див. модуль 4 «Коливання і хвилі»). Гальмівне рентгенівське випромінювання спостерігають в разі гальмування швидких електронів у полі ядер атомів речовини.

Із боку електростатичного поля, створюваного ядром, на електрон діє сила $\vec{F} = e\vec{E}$ (e — заряд електрона), яка надає йому прискорення $\vec{a} = e\vec{E}/m_e$, де $\vec{E} \sim Ze\vec{r}/r^3$ — напруженість електростатичного поля, створюваного ядром із зарядом Ze на відстані r від нього. Отже, $\vec{a} \sim Ze^2\vec{r}/(m_e r^3)$. Оскільки $P \sim e^2 a^2$, то потужність випромінювання гальмівного електрона

$$P \sim Z^2 e^6 / (m_e^2 r^4) \sim e^2 a^2. \quad (1.47)$$

Як видно з виразу (1.47), потужність випромінювання прямо пропорційна квадрату кількості заряду (Z^2) і обернено пропорційно квадрату маси електрона. Електрони — найлегші заряджені частинки, тому більш потужне випромінювання відбувається в разі *гальмування в матеріалі анода з великим Z і саме електронів*, а не іонів, маси яких на три порядки перевищують масу електрона.

Якщо зінтегрувати $dW = Pdt \sim e^2 a^2 dt$ у межах від 0 до Δt і врахувати, що $a = v_0 / \Delta t$, припускаючи, що під час гальмування прискорення стало, то виходить, що випромінювальна енергія

$$W \sim e^2 v_0^2 / \Delta t, \quad (1.48)$$

тим більша, чим більша початкова швидкість електронів v_0 і чим менший час гальмування Δt .

Це означає, що помітне випромінювання відбуватиметься в разі *різкого гальмування швидких електронів*.

Такі умови створюються в рентгенівській трубці. Вона являє собою вакуумний балон, у якому міститься розжарюваний струмом катод — джерело термоелектронів, і розміщений напроти металевий анод, який часто називають антикатодом. Електрони в рентгенівській трубці прискорюються високою різницею потенціалів до 50 кВ (якщо $U = 50$ кВ, швидкість електронів у трубці $v \approx 0,4c$). Потрапивши на металевий анод, швидкі електрони різко гальмуються, унаслідок чого виникає *гальмівне рентгенівське випромінювання*. Спектр цього випромінювання є суцільним, як і спектр видимого білого світла, тому його ще називають *білим рентгенівським випромінюванням*.

Зауважимо, що під час бомбардування анода електронами майже вся їх енергія перетворюється в тепло і лише мала частина 0,1–1 % — у рентгенівське випромінювання. Із цієї причини анод в рентгенівських трубках інтенсивно охолоджують проточною водою.

Експериментальні криві розподілу інтенсивності $I_\lambda = dI/d\lambda$ за довжинами хвиль для $U = 20 - 50$ кВ при бомбардуванні електронами вольфрамового (W) анода зображено на рис. 1.6, на якому чітко видно, що для кожної напруги існує своя λ_{\min} і λ_{\max} , при цьому $\lambda_{\max} \approx (3/2)\lambda_{\min}$.

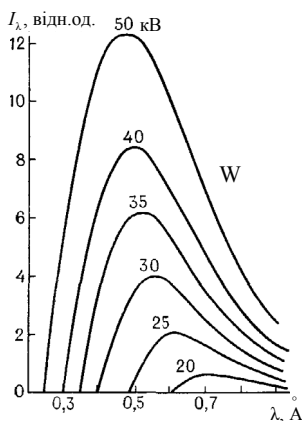


Рис. 1.6

Максимум у суцільному спектрі класична електродинаміка пояснює, а наявність короткохвильової межі — ні.

За класичною теорією поява суцільного спектра зумовлюється різким гальмуванням електронів у речовині анода рентгенівської трубки. Електрон, гальмуючись на поверхні анода, випромінює електромагнітний імпульс (пакет хвиль), який можна розглядати як суму нескінченної кількості електромагнітних хвиль усіх довжин — від нуля ($\lambda = 0$) до нескінченності ($\lambda = \infty$). Математично це відповідає розкладанню імпульсу певної форми на компоненти Фур'є. Оскільки анод бомбардується безперервно електронами, то вся сукупність електромагнітних імпульсів, кожний з яких має свій максимум, сприймається як суцільний спектр усіх довжин хвиль з усередненим максимумом.

Існування короткохвильової межі впливає з квантової природи світла. Згідно із квантовим уявленням електрон у разі гальмування на аноді породжує один фотон — процес обернений фотоефекту. У рентгенівській трубці електрон із зарядом e за рахунок прискорювальної різниці потенціалів U до моменту гальмування на аноді набуває *максимальної кінетичної енергії*

$$\frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = eU. \quad (1.49)$$

Енергія породженого фотона не може перевищувати енергію електрона $\hbar\omega \leq eU$. У разі повного перетворення енергії електрона в енергію випромінювання одного фотона останній матиме максимальне значення енергії:

$$\hbar\omega_{\max} = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda_{\min}} = eU \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{2\pi c \hbar}{eU} = \frac{hc}{eU}. \quad (1.50)$$

Підставивши у вираз (1.50) значення сталих величин h і c , дістанемо

$$\lambda_{\min} = \frac{12,395}{U}, \quad (1.51)$$

де λ_{\min} виражено в ангстремах (Å), а U — у кіловольтах.

Існування короткохвильової межі в суцільному спектрі є яскравим проявом квантових властивостей рентгенівського випромінювання. З усіх методів визначення сталої Планка метод, побудований на вимірюванні λ_{\min} , вважається найбільш точним. Його називають *методом ізохромат*, сутність якого полягає в такому.

Спектрометр для рентгенівського випромінювання встановлюється так, щоб у лічильник потрапляло монохроматичне випромінювання, тобто випромінювання певної довжини хвилі λ . Далі вимірюють інтенсивність I_λ залежно від прикладеної до рентгенівської трубки напруги U .

Зменшуючи U , отримують залежність I_λ від U . Таку залежність для різних λ зображено на рис. 1.7.

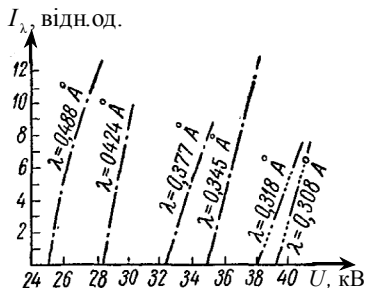


Рис. 1.7

Екстраполюючи кожен з кривих до перетину з віссю абсцис, знаходять U_0 ($I_\lambda = 0$).

Для кожної з довжин хвиль λ існує своє значення U_0 , саме ці довжини хвиль і є мінімальними, якщо $U = U_0$.

Ураховуючи вираз (1.50), дістаємо формулу для розрахунку сталої Планка:

$$h = \frac{e\lambda_{\min}}{c} U_0. \tag{1.52}$$

1.4. Ефект Комптона. Корпускулярне розсіяння світла

Згідно з класичною хвильовою теорією змінне електричне поле падаючої хвилі викликає коливання електронів речовини з частотою падаючої хвилі.

У свою чергу коливальні електрони випромінюють вторинні (розсіяні) хвилі такої самої частоти, отже, частота (довжина хвилі) розсіяного світла не змінюється.

Проте Артур Комптон (1922), досліджуючи розсіяння жорсткого рентгеновського випромінювання речовинами, що складаються з легких атомів (графіт, парафін), виявив, що в розсіяному випромінюванні поруч з падаючим випромінюванням з довжиною хвилі λ існують також промені з більшою довжиною хвилі $\lambda' > \lambda$.

Схему дослідної установки А. Комптона зображено на рис. 1.8.

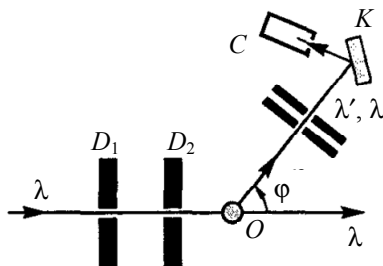


Рис. 1.8

Джерелом монохроматичного рентгенівського випромінювання слугувала рентгенівська трубка з молібденовим антикатодом (характеристична MoK_α -лінія має довжину хвилі $\lambda = 0,709 \text{ \AA}$). Діафрагми D_1 і D_2 виділяли вузький пучок променів, який падав на досліджуваний зразок O . Спектральний склад розсіяного випромінювання досліджувався за допомогою рентгенівського спектрометра, до складу якого входили кристал K та лічильник C (іонізаційна камера або фотопластинка).

Дослідні дані щодо розсіяння на графіті для різних кутів φ показано на рис. 1.9. Зверху зображено форму лінії падаючого випромінювання, тобто кутовий розподіл інтенсивності в MoK_α -лінії, нижче — те саме для розсіяного випромінювання за різних кутів φ . Чітко видно такі особливості: а) у розсіяному випромінюванні поруч з початковою з'являється додаткова лінія, зміщена в бік більших кутів дифракції на кристалі K . Це означає, що зміщена лінія має довжину хвилі більшу, за падаючу, $\lambda' > \lambda = 0,709 \text{ \AA}$; б) величина зміщення зростає зі збільшенням кута φ ; в) збільшення кута розсіяння φ супроводжується падінням інтенсивності незміщеної лінії та зростанням інтенсивності зміщеної лінії.

Появу в розсіяному випромінюванні довжини хвилі, відмінної від довжини падаючої хвилі, називають ефектом Комптона. Класична теорія не змогла пояснити закономірності комптон-ефекту. Це явище на підставі квантових уявлень пояснив Артур Комптон і незалежно від нього Петер Дебай.

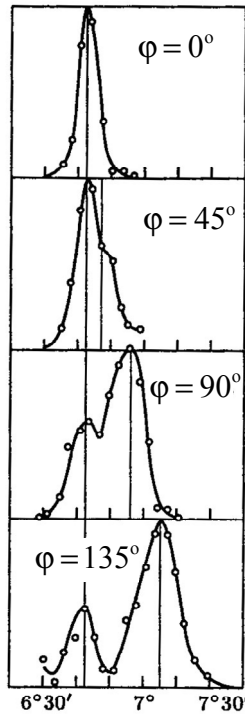


Рис. 1.9

Фотони. Світло — потік фотонів, енергія яких $\hbar\omega$. У вакуумі світло поширюється зі швидкістю c . Отже, з такою самою швидкістю поширюються і фотони — *релятивістські частинки*. Згідно з теорією відносності (див. модуль 1 «Механіка», НЕ 4) повна енергія будь-якої релятивістської частинки, що рухається зі швидкістю v ,

$$E = mc^2 = m_0c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (1.53)$$

де m_0 — маса спокою частинки. Якщо $v = c$, знаменник виразу (1.53) перетворюється в нуль, а релятивістська маса — у нескінченність. Тому слід припустити, що для фотона $m_0 = 0$.

Фотон — особлива частинка, яка на відміну від електрона, протона, нейтрона та інших частинок не має маси спокою.

Єдиний стан фотона — рух зі швидкістю світла c . Фотон у стані спокою — поняття, що не має фізичного змісту.

У стані руху фотону можна приписати релятивістську масу, яку визначають із закону взаємозв'язку маси та енергії. Зокрема, в разі руху вздовж гравітаційного поля ($\vec{r} \parallel \vec{v}$)

$$m_{\phi} c^2 = \hbar\omega \Rightarrow m_{\phi} = \hbar\omega/c^2 = h\nu/c^2 = h/c\lambda. \quad (1.54)$$

Так, для світлових променів, до яких чутливість людського ока максимальна, $\lambda = 555$ нм (зелене світло), релятивістська маса фотона $m_{\phi} = 4 \cdot 10^{-36}$ кг, для жорсткого рентгенівського випромінювання маса фотона зрівняна з масою електрона ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг), а для γ -випромінювання — більша за масу електрона.

Імпульс фотона

$$p_{\phi} = m_{\phi} c = h\nu/c = \hbar\omega/c = 2\pi\hbar/\lambda = \hbar k, \quad (1.55)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ — модуль хвильового вектора \vec{k} , який вказує напрям поширення світла.

У векторній формі вираз (1.55) набуває вигляду

$$\vec{p}_{\phi} = \hbar\vec{k}. \quad (1.56)$$

Отже, фотон як частинка має *енергію* та *імпульс*. Саме ці величини і характеризують *корпускулярні* властивості світла.

Слід зазначити, що у сучасній квантовій фізиці взагалі не використовують поняття маси фотона (безмасова частинка), але в загальному курсі фізики для наочності фотон зазвичай розглядають з тих самих позицій, що і звичайні частинки, які мають масу. Також широко використовують вираз «фотон розсіявся на певній частинці», але лише тому, що це не суперечить розгляду явища відповідно до законів збереження імпульсу та енергії.

Тиск світла. Гіпотеза, що світло тисне на освітлювані поверхні, була вперше висловлена Іоганном Кеплером (1619) для пояснення відхилення хвостів комет, що пролітають поблизу Сонця. Тиск світла за класичною електромагнітною теорією розглянуто в модулі 4 «Коливання і хвилі», підрозд. 4.4. За нормального падіння світла на

плоску поверхню він становить $p = \langle w \rangle (1 + R)$, де $\langle w \rangle$ — середня густина енергії світлової хвилі; R — коефіцієнт відбивання.

Покажемо, що цю формулу можна отримати, використовуючи квантові уявлення. Очевидно, що тиск світла зумовлений зміною імпульсу фотонів при поглинанні та відбиванні їх поверхнею тіл. Спрямуємо за нормаллю на плоску поверхню монохроматичний світловий потік з частотою ν . Середню густану потоку світлової енергії позначимо через $\langle S \rangle = \langle w \rangle c$ (див. модуль 4 «Коливання і хвилі», підрозд. 4.4). Тоді кількість фотонів, що падають перпендикулярно на одиничну поверхню за одиницю часу, порівнюватиме:

$$N = \langle S \rangle / h\nu. \quad (1.57)$$

Кожний фотон має імпульс $h\nu/c$, тому імпульси, які отримують за одиницю часу *абсолютно поглинальна* та *абсолютно відбивальна* одиничні поверхні, відповідно становитимуть

$$p_{\text{погл}} = N \frac{h\nu}{c} = \frac{\langle S \rangle}{c} \frac{h\nu}{h\nu} = \frac{\langle S \rangle}{c} = \langle w \rangle; \quad (1.58)$$

$$p_{\text{відб}} = N \frac{2h\nu}{c} = \frac{\langle S \rangle}{c} \frac{2h\nu}{h\nu} = \frac{2\langle S \rangle}{c} = 2\langle w \rangle. \quad (1.59)$$

Оскільки імпульс, отриманий за одиницю часу одиницею поверхні, є тиском на цю поверхню, то формули (1.58) і (1.59) являють собою тиск світла відповідно на повністю поглинальну та повністю відбивальну поверхні.

Якщо поверхня характеризується деяким коефіцієнтом відбивання R , то із загальної кількості N падаючих фотонів відбиватимуться RN , а поглинатимуться $(1 - R)N$ фотонів. Тиск у цьому випадку

$$p = (1 - R)N \frac{h\nu}{c} + RN \frac{2h\nu}{c} = N \frac{h\nu}{c} (1 + R) = \langle w \rangle (1 + R). \quad (1.60)$$

У разі, якщо потік фотонів падає під кутом α до нормалі площини, формула (1.60) набуває вигляду

$$p = \langle w \rangle (1 + R) \cos^2 \alpha. \quad (1.61)$$

Корпускулярне розсіяння світла. Ефект Комптона вдалося пояснити лише на основі уявлень про корпускулярно-квантову природу світла, розглядаючи розсіяння як процес пружного зіткнення рентгенівських фотонів з майже *вільними електронами*. Вільними можна вважати електрони, енергія зв'язку яких з атомом значно менша за енергію рентгенівських квантів. Цю умову передусім задовольняють зовнішні, тобто валентні електрони атома.

У разі зіткнення фотона з вільним електроном відбувається процес розсіяння, тобто фотон змінює свій початковий напрям руху (див. підрозд. 1.2). При цьому частину своєї початкової енергії $\hbar\omega$ він передає електрону, у результаті чого частота розсіяного фотона зменшується $\omega' < \omega$, а отже, довжина розсіяної світлової хвилі збільшується $\lambda' > \lambda$. Таке розсіяння називають *некогерентним* або *комптон-ефектом*.

Рентгенівські кванти мають великі енергії, тому при зіткненні з вільними електронами, останні набувають релятивістських швидкостей і можуть залишити межі атома. Електрони, звільнені з атома в результаті *некогерентного розсіяння*, називають *електронами віддачі*. На відміну від фотоелектронів вони отримують не всю, а лише частину енергії фотона, але їх, як і фотоелектрони, реєструють за допомогою іонізаційної камери або магнітного спектрографа. Оскільки швидкості релятивістські, то в розрахунках слід користуватися релятивістськими формулами залежності маси від швидкості.

Розрахунок ефекту Комптона та аналіз результатів. Розглянемо пружне зіткнення рентгенівського фотона, що має енергію $\hbar\omega$ та імпульс $\hbar\vec{k}$ з вільним електроном, який до зіткнення перебуває у стані спокою (рис. 1.10).

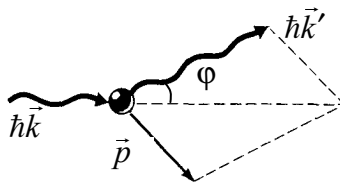


Рис. 1.10

Імпульс вільного електрона у стані спокою дорівнює нулю, а його енергія $m_e c^2$, де m_e — маса спокою електрона. Після зіткнення електрон матиме імпульс $\vec{p} = m_e \vec{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ та енергію $E = m_e c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Вилучивши з останніх двох формул швидкість v , дістанемо вираз для повної енергії електрона через імпульс:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2}. \quad (1.62)$$

Енергія та імпульс фотона після зіткнення також зміняться і будуть дорівнювати $\hbar\omega'$ і $\hbar\vec{k}'$. Відповідно до законів збереження енергії й імпульсу запишемо такі рівності:

$$\hbar\omega + m_e c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2}, \quad (1.63)$$

$$\hbar\vec{k} = \vec{p} + \hbar\vec{k}'. \quad (1.64)$$

Поділимо співвідношення (1.63) на c і подамо його у вигляді

$$\sqrt{p^2 + m_e^2 c^2} = \hbar(k - k') + m_e c$$

($\omega/c = k$). Піднісши до квадрата, отримуємо:

$$p^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk') + 2\hbar m_e c(k - k'). \quad (1.65)$$

Із виразу (1.64) випливає, що

$$p^2 = \hbar^2(\vec{k} - \vec{k}')^2 = \hbar^2(k^2 + k'^2 - 2kk' \cos\varphi) \quad (1.66)$$

(φ — кут між векторами \vec{k} і \vec{k}' ; рис.1.10).

Із порівняння виразів (1.65) і (1.66) дістаємо

$$m_e c(k - k') = \hbar k k' (1 - \cos\varphi),$$

або помноживши на 2π і поділивши на $m_e c k k'$, маємо

$$\frac{2\pi}{k'} - \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos\varphi).$$

Ураховуючи, що $2\pi/k = \lambda$, приходимо до кінцевої формули

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\varphi), \quad (1.67)$$

де величину

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} = \frac{h}{m_e c} = 0,0243 \text{ \AA} \quad (1.68)$$

називають *комptonівською довжиною хвилі електрона*, яка є важливою атомною сталою.

Із формули (1.67) випливає, що комptonівське зміщення $\Delta\lambda$ не залежить від довжини хвилі λ падаючого випромінювання та природи розсіювальної речовини (від номера хімічного елемента Z). Довжина хвилі зміщеної лінії λ' зростає зі збільшенням кута розсіяння: $\varphi = 0$, $\Delta\lambda = 0$; $\varphi = \pi/2$, $\Delta\lambda = \lambda_C$; $\varphi = \pi$, $\Delta\lambda = 2\lambda_C$ — найбільша зміна довжини хвилі відбувається у випадку розсіяння у зворотному напрямі.

Можна показати, що зі збільшенням кута розсіяння φ зростає частка енергії, яку набуває електрон віддачі. Звідси випливає, що зростає також і відносна кількість електронів, які можна вважати вільними; отже, інтенсивність зміщеної компоненти збільшується, а незміщеної — зменшується (див. рис. 1.9)

Наявність незміщеної компоненти зумовлено *внутрішніми електронами* атомів розсіювальної речовини, які вже не можна вважати вільними. Енергія зв'язку внутрішніх електронів, особливо в атомах з великим Z , зрівняна або перевищує енергію рентгенівських фотонів, тому останнім не вистачає енергії для вибивання внутрішніх електронів з атома. У цьому випадку електрон віддачі відсутній і розсіяння фотона відбувається не на вільному електроні, а на атомі в цілому, маса якого у тисячі разів перевищує масу електрона. Якщо у формулі (1.68) масу електрона замінити на масу атома, то комptonівська довжина хвилі λ_C стане меншою у тисячі разів, а зміщення $\Delta\lambda$ — непомітним. Оскільки в атомах вуглецю графіту та парафіну наявні електрони з відносно сильними та слабкими зв'язками, то в спектрі розсіяного випромінювання спостерігаються дві лінії: з незмінною довжиною хвилі λ — *когерентне розсіяння* і збільшеною λ' — *некогерентне розсіяння*.

Очевидно, що чим менша енергія фотона, тим виразніше проявляється зв'язок електрона з атомом, тим менше електронів, які можна вважати вільними, і навпаки. Ось чому ефект Комптона не виникає для видимого світла, енергія фотонів якого є малою навіть у порівнянні з енергією зв'язку зовнішніх (валентних) електронів атома.

У наступних дослідах А. Комптона, а також у дослідах Вальтера Боте і Чарльза Вільсона (1923), В. Боте і Н. Гейзера (1925) вдалося зареєструвати електрон віддачі та довести, що він і розсіяний фотон з'являються одночасно і тим самим надійно довести існування елементарного (індивідуального) акту зіткнення фотона з електроном. Отже, в елементарному акті взаємодії фотона та електрона виконуються фундаментальні закони збереження енергії й імпульсу [див. формули (1.63) і (1.64)]. Це мало важливе значення, оскільки на початку ХХ ст. у зв'язку з труднощами пояснення класичною фізикою явищ взаємодії світла з речовиною деякі відомі вчені (Нільс Бор, Хендрик Крамерс, Джон Кларк Слетер) висунули припущення, що закони збереження енергії й імпульсу в явищі розсіяння виконуються лише *статистично*, тобто для великої кількості актів взаємодії. Досліди А. Комптона переконують в хибності такого припущення.



Запитання та завдання для самоконтролю

1. Яке випромінювання називають тепловим та в чому полягають його особливості?
2. Дайте визначення спектральної та повної густин випромінювання.
3. Дайте визначення випромінювальної, поглинальної та відбивальної здатностей тіла. Що називають енергетичною світністю тіла?
4. Сформулюйте закон Кірхгофа.
5. Яке тіло називають абсолютно чорним? Які особливості розподілу енергії в спектрі його випромінювання?
6. Проаналізуйте формулу Релея–Джинса. Що розуміють під «ультрафіолетовою катастрофою»?
7. Яким припущенням користувався Майкл Він для виведення своєї формули?

8. Запишіть формулу Планка та проаналізуйте її для великих і малих частот.

9. Сформулюйте та виконайте аналіз законів випромінювання абсолютно чорного тіла.

10. Яке явище називають фотоефектом? Проаналізуйте вольт-амперну характеристику фотоефекту.

11. Сформулюйте головні закономірності фотоефекту. Що називають червоною межею фотоефекту?

12. Із якими труднощами стикнулася класична фізика при спробі пояснення закономірностей фотоефекту?

13. За допомогою формули Ейнштейна поясніть особливості явища фотоефекту.

14. Яка природа гальмівного рентгенівського випромінювання? Яким способом його отримують?

15. Поясніть природу існування короткохвильової межі в суцільному спектрі гальмівного рентгенівського випромінювання.

16. У чому суть ефекту Комптона? Виконайте його розрахунок і проаналізуйте результати.

17. Що називають фотоном? Які його властивості та фізичні характеристики?

18. Поясніть існування тиску світла з позицій хвильової та квантової теорій.



Задачі

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Електрична піч споживає потужність $P = 500$ Вт. Температура її внутрішньої поверхні при відкритому малому отворі діаметром 5,0 см становить 700 °С. Яка частина потужності, що споживається, розсіюється зовнішніми стінками?

Розв'язання. За усталеного температурного режиму печі вся електрична енергія, що споживається щосекунди (тобто спожита потужність P), випромінюється назовні отвором і зовнішніми стінками

$$P = \Phi_{\text{от}} + \Phi_{\text{ст}}, \quad (1)$$

де $\Phi_{\text{от}}$ і $\Phi_{\text{ст}}$ — потоки випромінювання від отвору та зовнішніх стінок відповідно. За умови задачі необхідно знайти відношення $\alpha = \Phi_{\text{ст}}/P$, яке з урахуванням виразу (1), подамо у вигляді

$$\alpha = (P - \Phi_{\text{от}}) / P = 1 - \Phi_{\text{от}} / P. \quad (2)$$

Випромінювання з малого отвору печі можна вважати за випромінювання абсолютно чорного тіла, для якого справедливий закон Стефана–Больцмана $M^*(T) = \sigma T^4$. За означенням $M^*(T) = \Phi_{\text{от}}/S$, звідки

$$\Phi_{\text{от}} = M^*(T)S = \sigma T^4 \pi D^2 / 4. \quad (3)$$

Із формули (2) з урахуванням виразу (3) остаточно дістаємо

$$\alpha = 1 - \frac{\pi D^2}{4} \frac{\sigma T^4}{P}. \quad (4)$$

Підставляємо у формулу (4) числові значення фізичних величин у СІ: $P = 500$ Вт; $D = 0,05$ м; $T = 973$ К; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/м² · К⁴. Знаходимо:

$$\alpha = 1 - \frac{3,14(0,05)^2}{4} \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 973^4}{500} = 0,8.$$

Задача 2. Визначити за допомогою формули Планка енергетичну світність ΔM^* абсолютно чорного тіла, яка припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta \lambda = 10 \text{ \AA}$, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності за температури тіла 3000 К.

Розв'язання. Поруч з величиною M_{ω} (див. вираз 1.4), спектральну густину енергетичної світності тіла характеризують також величиною $M_{\lambda} = dM/d\lambda$ — розподілом енергії випромінювання за довжинами хвиль. Тоді для інтервалу $\Delta \lambda$ знаходимо

$$\Delta M^* = M_{\lambda_0} \Delta \lambda, \quad (1)$$

де M_{λ_0} — максимальне значення спектральної густини енергетичної світності (або, що те саме, максимум випромінювальної здатності) абсолютно чорного тіла.

Між величинами M_ω і M_λ існує співвідношення $M_\lambda = M_\omega 2\pi c / \lambda^2$ (див. підрозд. 1.1.2.). Використаємо його, а також $\omega = 2\pi c / \lambda$ для запису формули Планка $f_\omega(T) = M_\omega(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ (див. вираз (1.36)) за шкалою довжини хвиль, тобто для знаходження M_λ :

$$M_\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{c}{\lambda^2} \frac{h(2\pi c/\lambda)^3}{4\pi^2c^2} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \frac{2\pi\hbar c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \quad (2)$$

Максимум цієї функції припадає на довжину хвилі, яку визначимо із закону зміщення Віна:

$$\lambda_{\max} = \lambda_0 = b / T. \quad (3)$$

Підставивши вираз (3) у формулу (2), дістанемо

$$M_{\lambda_0} = \frac{2\pi\hbar c^2 T^5}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}. \quad (4)$$

Звернемо увагу, що формула (4) виражає пропорційну залежність $M_{\lambda_0}(T)$ від T^5 , яку іноді називають *другим законом Віна* і записують у вигляді

$$M_{\lambda_0}(T) = b'T^5, \quad (5)$$

де $b' = \frac{2\pi\hbar c^2}{b^5} \frac{1}{e^{hc/bk} - 1}$ — нова таблична стала, величина якої становить $b' = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$. Із використанням другого закону Віна остаточно маємо

$$\Delta M^* = M_{\lambda_0} \Delta\lambda = b'T^5 \Delta\lambda.$$

Підставляємо відповідні числові значення в одиницях системи СІ: $T = 3000 \text{ К}$, $\Delta\lambda = 10^{-9} \text{ м}$. Дістаємо

$$\Delta M^* = 3,2 \text{ кВт}/\text{м}^2.$$

Задача 3. Нехтуючи втратами тепла, розрахувати потужність електричного струму, потрібну для розжарення вольфрамової нитки діаметром $d = 1$ мм і завдовжки $l = 20$ см до температури 3500 К. Коефіцієнт чорноти вольфраму для цієї температури $k = 0,35$. Який струм проходить крізь лампу, якщо напруга в мережі становитиме 220 В?

Розв'язання. Оскільки нитка випромінює як сіре тіло, то її енергетична світність визначатиметься виразом

$$M(T) = k\sigma T^4, \quad (1)$$

а потужність випромінювання

$$P = M(T) \cdot S = k\sigma T^4 \cdot \pi dl = 1870 \text{ Вт}, \quad (2)$$

де $S = \pi dl$ — площа поверхні вольфрамової нитки.

Потужність струму $P = IU$, звідки

$$I = P/U = 8,5 \text{ А}.$$

Задача 4. Лазер випромінює імпульси тривалістю 1,5 мкс, енергія яких становить 250 Дж. Потік цих імпульсів створює майже паралельний пучок променів, площа поперечного перерізу якого дорівнює 1 см^2 . Довжина хвилі, випромінюваної лазером 1,06 мкм. Визначити густину потоку фотонів у пучку.

Розв'язання. Енергія окремого фотона $h\nu$, а їх кількість в імпульсі $N = W/h\nu$, або з урахуванням співвідношення $c = \lambda\nu$

$$N = \lambda W/hc.$$

Вважаючи, що потужність лазера та поперечний переріз пучка не змінюються протягом часу випромінювання, дістаємо вираз для густини потоку фотонів

$$j_\phi = \frac{N}{St} = \frac{\lambda W}{chSt}.$$

Підставляючи числові значення в СІ, знаходимо:

$$j_\phi = \frac{1,06 \cdot 10^{-6} \cdot 250}{3 \cdot 10^8 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}} \approx 8,9 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Задача 5. Фотон з довжиною хвилі 0,002 нм вибиває з поверхні платини електрон. Визначити швидкість та імпульс фотоелектрона, а також затримувальну напругу.

Розв'язання. Порівняємо енергію фотона з енергією спокою електрона. Якщо остання буде значно більшою за енергію фотона, то швидкість фотоелектрона визначатимемо за класичною формулою; якщо ж енергія спокою електрона буде сумірною або меншою за енергію фотона, то — за релятивістською.

Енергія фотона

$$E = h\nu = hc/\lambda \approx 10^{-13} \text{ Дж} = 0,625 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,625 \text{ MeV},$$

а енергія спокою електрона

$$W_0 = m_e c^2 = 8,2 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 0,512 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,512 \text{ MeV}$$

($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг — маса спокою електрона).

Бачимо, що значення енергій сумірні, тому для визначення швидкості фотоелектрона користуватимемося релятивістською формулою для кінетичної енергії:

$$W_{\text{к}} = mc^2 - m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_e c^2 = \frac{W_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - W_0, \quad (1)$$

де $m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ — релятивістська маса електрона. Розв'язавши рівняння (1) відносно v , дістанемо

$$v = \frac{c \sqrt{2(W_0 + W_{\text{к}})W_{\text{к}}}}{W_0 + W_{\text{к}}}. \quad (2)$$

Значення $W_{\text{к}}$ знайдемо з рівняння Ейнштейна для фотоефекту $E = A + W_{\text{к}}$. Оскільки робота виходу електрона з платини $A = 5,3 \text{ eV}$ мізерна порівняно з енергією фотона $E = 0,625 \cdot 10^6 \text{ eV}$, то в рівнянні Ейнштейна нею можна знехтувати і вважати, що $E = W_{\text{к}}$. Підставляючи відповідні значення фізичних величин у формулу (2), знаходимо $v = 2,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Звернімо увагу, що розрахунок швидкості фотоелектрона за класичною нерелятивістською формулою $W_k = m_e v^2 / 2$ дає величину $v = \sqrt{2W_k / m_e} \approx 4,7 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, яка більша за швидкість світла у вакуумі, чого не може бути.

Релятивістський імпульс фотоелектрона

$$p = mv = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Затримувальну напругу визначаємо із закону збереження енергії $E = W_k = eU_3$, звідки

$$U_3 = W_k / e = 0,625 \cdot 10^6 \text{ В}.$$

Задача 6. Пучок монохроматичного світла з довжиною хвилі 663 нм падає за нормаллю на плоску дзеркальну поверхню. Потужність світлової енергії становить 0,6 Вт. Визначити силу світлового тиску, а також кількість фотонів, що падають на одиницю поверхні протягом 5 с.

Розв'язання. Згідно з формулою (1.60) тиск світла за нормального падіння становить

$$p = \langle w \rangle (1 + R),$$

де $\langle w \rangle$ — середня густина енергії світлової хвилі; R — коефіцієнт відбиття. Оскільки поверхня дзеркальна, то $R = 1$, отже,

$$p = 2 \langle w \rangle. \quad (1)$$

Середню густину енергії подамо у вигляді

$$\langle w \rangle = \frac{E}{v} = \frac{Pt}{cts} = \frac{P}{cs}, \quad (2)$$

де P і E — потужність і енергія випромінювання відповідно; s — площа поверхні, на яку падає світло.

Сила тиску $F = ps$, або з урахуванням формул (1) і (2) знаходимо

$$F = 2P / c. \quad (3)$$

Підставивши числові величини, знаходимо $F = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} = 4 \text{ нН}$.

За означенням інтенсивність електромагнітної хвилі дорівнює середньому значенню густини потоку світлової енергії

$I = \langle S \rangle = \langle w \rangle c$. Поділивши цю величину на енергію одного кванта $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$, отримаємо кількість фотонів, що падають на одиницю поверхні $s = 1 \text{ м}^2$ за одиницю часу. За час t їх кількість становитиме

$$N = \frac{I}{h\nu} t = \frac{\langle w \rangle ct}{hc/\lambda}. \quad (4)$$

Підставивши у формулу (4) середнє значення густини енергії з виразу (2), дістанемо

$$N = \frac{Pt\lambda}{hcs} = \frac{0,6 \cdot 5 \cdot 663 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1} = 10^{19} \text{ м}^{-2}.$$

Задача 7. Кут розсіяння фотона з енергією 1,2 МеВ на вільному електроні дорівнює 60° . Визначити довжину хвилі розсіяного фотона.

Розв'язання. Зміна довжини хвилі фотона для комптонівського розсіяння визначається за формулою (1.67)
 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\varphi)$, звідки

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\varphi). \quad (1)$$

Довжину хвилі λ подамо через енергію фотона $\lambda = hc/\varepsilon$ та підставимо її у формулу (1):

$$\lambda' = hc/\varepsilon + \lambda_C(1 - \cos\varphi). \quad (2)$$

Підставимо значення фізичних величин у СІ: $\varepsilon = 1,2 \text{ МеВ} = 1,92 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$, $\lambda_C = 0,243 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ (комтонівська довжина хвилі) у формулу (2). Тоді

$$\lambda' = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Аудиторні задачі

1. Вважаючи випромінювання Сонця близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла, для якого максимум випромінювальної здатності припадає на довжину хвилі 0,48 мкм, знайти масу, яка втрачається Сонцем за 1 рік унаслідок випромінювання. ($1,6 \cdot 10^{17} \text{ кг}$)

2. На яку довжину хвилі припадає максимум спектральної густини енергетичної світності абсолютно чорного тіла, що має температуру, яка дорівнює температурі тіла людини ($37\text{ }^\circ\text{C}$). ($9,4\text{ мкм}$)

3. У спектрі зірки Сиріус максимум інтенсивності випромінювання припадає на довжину хвилі $\lambda = 0,29\text{ мкм}$. Визначити температуру поверхні Сиріуса. (10^4 K)

4. Із якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його кінетична енергія дорівнювала енергії фотона з довжиною хвилі 520 нм ? ($9,2 \cdot 10^5\text{ м/с}$)

5. Червона межа фотоелекту для цинку становить 310 нм . Знайти роботу виходу електронів з цинку, максимальну швидкість та енергію фотоелектронів при опроміненні цинку світлом з довжиною хвилі 220 нм . Яка частина енергії витрачається на виведення електрона? (4 eV ; $7,6 \cdot 10^5\text{ м/с}$; $1,6\text{ eV}$; $0,7$)

6. Визначити мінімальну довжину хвилі в суцільному спектрі рентгенівських променів, якщо на рентгенівську трубку подається напруга 30 кВ . ($0,41\text{ \AA}$)

7. Визначити максимальну швидкість електронів, що вилітають з металу під дією γ -променів довжиною хвилі $0,030\text{ \AA}$. Урахувати можливі релятивістські ефекти. ($2,5 \cdot 10^8\text{ м/с}$)

8. На поверхню площею $0,01\text{ м}^2$ перпендикулярно до неї падає світлова енергія $1,05\text{ Дж/с}$. Знайти тиск світла у випадках, коли поверхня є: а) дзеркальною; б) повністю поглинальною. ($0,7\text{ мкПа}$; $0,35\text{ мкПа}$)

9. У комптонівському розсіянні енергія падаючого фотона розподіляється порівну між розсіяним фотоном і електроном віддачі. Кут розсіяння — $\pi/2$. Знайти енергію та імпульс розсіяного фотона. ($0,26\text{ MeV}$; $9,3 \cdot 10^{-12}\text{ кг}\cdot\text{м/с}$)

10. Потужність сонячного світлового потоку на Землі ополудні становить приблизно $1,3\text{ кВт/м}^2$. Вважаючи для спрощення, що сонячний світловий потік монохроматичний з довжиною хвилі $\lambda = 0,6\text{ мкм}$, визначити концентрацію фотонів. ($1,3 \cdot 10^{13}\text{ фотон/м}^3$)

11. Срібну кульку, відокремлену від інших тіл, опромінюють світлом з довжиною хвилі $\lambda = 0,1\text{ мкм}$. Робота виходу для срібла $A = 4,28\text{ eV}$. До якого максимального потенціалу зарядиться кулька, випромінюючи фотоелектрони? (8 В)

Навчальний елемент 2

АТОМ РЕЗЕРФОРДА–БОРА

На початку ХХ ст. реальність атомів стала загальноприйнятною. Було встановлено існування позитивних і негативних зарядів та відкрито, що носієм негативного заряду є електрон. Що є носієм позитивних зарядів (протон) залишалося невідомим, але існування позитивних іонів було відомо — іонізовані атоми. Не виникало сумнівів, що атом являє собою деяку складну електричну систему, розміри якої становлять приблизно 10^{-8} см. Оскільки атом у цілому нейтральний, то позитивні й негативні заряди, що входять до складу атома, повинні компенсувати один одного.

2.1. Ядерна модель атома

Теоретично існували дві моделі будови атома. Згідно з першою моделлю, запропонованою Томсоном, в усьому об'ємі атома зі сталою об'ємною густиною розподілений позитивний заряд, усередині якого містяться електрони. Електрони взаємодіють з окремими елементарними об'ємами позитивно зарядженого середовища атома відповідно до закону Кулона. У моделі атома Томсона електрони розміщуються в кутах деякої симетричної фігури і за малих зміщень зі своїх положень рівноваги повинні повертатися до початкових положень під впливом сил, пропорційних зміщенню (квазіупружні сили). Завдяки цьому виникають коливання електронів, а отже, атом здатен випромінювати електромагнітну хвилю. Нагадаймо, що Лоренц у своїй електронній теорії припускав існування квазіупружних сил в атомі, розглядаючи випромінювальний атом як лінійний гармонічний осцилятор.

Друга модель приписувала атому будову, аналогічну до Сонячної системи. У центрі міститься позитивно заряджене ядро,

навколо якого, подібно планетам, рухаються електрони, що утримуються біля ядра силами кулонівського притягання.

Яка з моделей є правильною, може вирішити лише експеримент. Для цього потрібно визначити розподіл електричного заряду в атомі. Це можна зробити, вивчаючи розсіяння заряджених частинок на атомі.

Досліди Резерфорда. Для своїх дослідів Резерфорд використав α -частинки, які виникають під час радіоактивного розпаду певної речовини.

Альфа-частинка це двічі іонізований атом гелію (ядро гелію), отже, вона має позитивний заряд $+2e$. Перевага α -частинок перед іншими видами випромінювання полягає у їх високій моноенергетичності, оскільки всі α -частинки, що випромінюються радіоактивним елементом, мають майже однакову швидкість.

Пучок α -частинок відомої інтенсивності спрямовувався на металеву мішень. Альфа-частинки розсіювалися на атомах мішені. Мішень вибиралась досить тонкою (фольга), щоб уникнути багаторазового розсіяння, тобто щоб спостережуване відхилення α -частинок було результатом лише одного зіткнення α -частинки з атомом мішені. Кількість α -частинок, розсіяних атомами мішені під різними кутами, реєструвалося за допомогою сцинтиляційного лічильника (флуоресцентний екран із сірчаного цинку, при зіткненні з яким α -частинка залишала на ньому спалах).

Було встановлено, що переважна більшість α -частинок розсіюється на малі кути $2^\circ - 3^\circ$. Проте є частинки, які відхиляються на кути 90° і навіть $150^\circ - 160^\circ$. Оскільки маса α -частинки перевищує масу електрона приблизно в 7300 разів, то вони не можуть розсіюватися при зіткненні з електронами. Отже, відхилення α -частинок, у тому числі на великі кути, на думку Резерфорда, можна пояснити зіткненням α -частинок з позитивним зарядом великої маси, сконцентрованим у дуже малому об'ємі, тобто з ядром атома. Виходячи з таких припущень, Резерфорд вивів формулу для розподілу розсіяних α -частинок залежно від кута ϑ :

$$\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}{2Ze^2} b, \quad (2.1)$$

де m_α — маса α -частинки; v — її початкова швидкість; Ze — позитивний заряд ядра атома мішені; b — прицільний параметр, тобто відстань від ядра до початкового напрямку руху α -частинки (рис. 2.1).

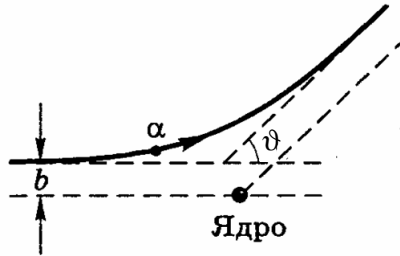


Рис. 2.1

Коли α -частинка пролітає поблизу ядра, її траєкторія являє собою гіперболу, при цьому кут відхилення (розсіяння) ϑ дорівнює куту між асимптотами гіперболи.

Із формули (2.1) видно, що чим менша прицільна відстань b , тим більший кут розсіяння ϑ .

Формула Резерфорда. У тонкій металевій фользі (завтовшки $\sim 4 \cdot 10^{-4}$ см) кожна α -частинка відхилялася від початкового напрямку руху в результаті одноразового розсіювання. Для того щоб відбулося розсіяння на кут у межах від ϑ до $\vartheta + d\vartheta$, α -частинка повинна пролетіти поблизу одного з ядер по траєкторії, прицільна відстань якої становить від b до $b - db$, при цьому з формули (2.1) випливає співвідношення між $d\vartheta$ і db :

$$-\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} \frac{d\vartheta}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v^2}{2Ze^2} db. \quad (2.2)$$

Знак мінус надалі враховувати не будемо, він лише показує, що зі збільшенням b ($db > 0$) кут відхилення ϑ зменшується ($d\vartheta < 0$).

Нехай площа поперечного перерізу падаючого пучка α -частинок дорівнює S . Тоді кількість розсіювальних атомів у фользі на шляху пучка можна подати у вигляді nS , де n — кількість атомів (ядер), що припадають на одиницю площі поверхні.

Відносна кількість α -частинок, що пролітають поблизу ядра по траєкторії з прицільним параметром від b до $b+db$, тобто відхилення в інтервалі кутів від ϑ до $\vartheta+d\vartheta$, буде дорівнювати

$$\frac{dN_{\vartheta}}{N} = \frac{dS}{S} = \frac{nS 2\pi b db}{S} = n2\pi b db = nd\sigma, \quad (2.3)$$

де dN_{ϑ} — потік частинок, розсіяних в інтервалі кутів від ϑ до $\vartheta+d\vartheta$; N — сумарний потік частинок у пучку; dS — сумарна площа кільця у перерізі S ; $d\sigma = 2\pi b db$ — диференціальний ефективний переріз, що дорівнює площі кільця радіусом b і завширшки db (рис. 2.2)

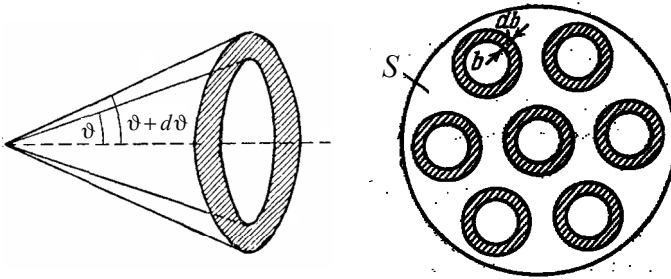


Рис. 2.2

Підставивши у формулу (2.3) вирази для b і db зі співвідношень (2.1) і (2.2), дістанемо

$$\frac{dN_{\vartheta}}{N} = n \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4 \sin^4(\vartheta/2)} = nd\sigma, \quad (2.4)$$

звідки знаходимо вираз для диференціального ефективного перерізу:

$$d\sigma = \left(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4 \sin^4(\vartheta/2)}. \quad (2.5)$$

У формулах (2.4) і (2.5) вираз $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ — це тілесний кут $d\Omega$, у межах якого містяться напрями, що відповідають кутам розсіювання від ϑ до $\vartheta+d\vartheta$. Тому формули (2.4) і (2.5) можна записати так:

$$\frac{dN_{\vartheta}}{N} = n \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}; \quad (2.6)$$

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\vartheta/2)}. \quad (2.7)$$

Вирази (2.6) і (2.7) називають *формулами Резерфорда*. Вони пройшли ретельну експериментальну перевірку.

Якщо зафіксувати тілесний кут $d\Omega = \text{const}$, у якому підраховуються розсіяні α -частинки, і змінювати при цьому кут ϑ (рис. 2.3), то із формули (2.6) випливає, що

$$dN_{\vartheta} \sin^4(\vartheta/2) = \text{const}. \quad (2.8)$$

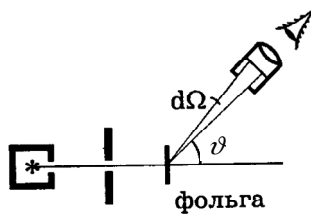


Рис. 2.3

Саме цей висновок було перевірено в першу чергу. Виявилось, що, незважаючи на те, що кожний зі співмножників у лівій частині виразу (2.8) змінювався (унаслідок зміни кута ϑ) у тисячі разів, їх добуток залишався сталим у межах похибки. Це означає, що формула Резерфорда правильно описує процес розсіювання.

Заряд ядра. Усі величини у формулі (2.6), за винятком Z , або відомі, або можуть бути виміряні під час експерименту. Отже, формула Резерфорда дає можливість визначити число Z (кількість елементарних *позитивних* зарядів ядра — сумарний заряд ядра) для атомів мішені, що розсіюють.

З'ясувалося, що число Z дорівнює порядковому номеру елемента в Періодичній системі елементів таблиці Менделєєва. Отже, хімічні елементи в таблиці Менделєєва розміщуються не за зростанням маси, а за збільшенням заряду Ze . Оскільки атом —

електронейтральна система, то кількість електронів, що входять до складу атома, також дорівнює Z .

Розподіл заряду в атомі. У дослідах Резерфорда були зафіксовані великі кути розсіювання α -частинок. Такі великі кути відхилення можливі, якщо позитивний заряд ядра зосереджений в об'ємі, лінійні розміри якого менші за прицільну відстань. Із формули (2.1) можна знайти, яка прицільна відстань b відповідає різним кутам відхилення ϑ . Виявилось, що для важких елементів, де величина ϑ досягала значень $150^\circ - 160^\circ$, прицільна відстань має порядок 10^{-13} см. Це означає, що на відстані між центрами α -частинки й атома порядку 10^{-13} см сили взаємодії ще підлягають закону Кулона. Звідси, у свою чергу, випливає, що позитивний заряд атома, тобто ядро атома, має розміри, які не перевищують 10^{-13} см.

Оскільки розміри атомів мають порядок 10^{-8} см, то можна зробити висновок, що відстань електронів від ядра має той самий порядок 10^{-8} см. Маса електронів вкрай мала порівняно з масою атомів, а отже, майже вся маса атома зосереджена в його ядрі. Це означає, що досліди Резерфорда переконливо свідчать на користь *планетарної моделі атома*. Проте з'ясувалося, що ця модель суперечить законам класичної фізики.

Несумісність планетарної моделі атома з уявленнями класичної фізики. За теоремою Ірншоу (див. модуль 3 «Електрика і магнетизм», підрозд. 1.4.3) система точкових зарядів, що перебувають у стані спокою, не може бути стійкою. Тому, щоб планетарна модель атома була механічно стійкою, слід вважати, що позитивні й негативні заряди в атомі перебувають у відносному русі, тобто електрони, за припущенням Резерфорда, обертаються навколо ядра. Електрони, що несуть негативні заряди, рухаючись коловими орбітами, мають доцентрове прискорення $a = v^2 / r$. Якщо радіус орбіти становить 10^{-8} см, то з другого закону Ньютона (добуток маси на доцентрове прискорення дорівнює кулонівській силі притягання) $m_e v^2 / r = Ze \cdot e / 4\pi\epsilon_0 r^2$ можна оцінити швидкість електрона на орбіті в атомі водню ($Z = 1$)

$v \approx 10^8$ см/с, частоту обертання $\nu = v/2\pi r \approx 10^{15}$ с⁻¹ та його доцентрове прискорення $a = v^2 / r \approx 10^{24}$ см/с².

Згідно з уявленнями класичної електродинаміки будь-який заряд, що рухається з прискоренням, випромінює електромагнітні хвилі, при цьому потужність випромінювання пропорційна до квадрата заряду і квадрата прискорення $P \sim q^2 a^2$ (див. модуль 4 «Коливання і хвилі», підрозд. 4.5). Очевидно, що за величезного прискорення 10^{24} см/с² електрони повинні інтенсивно випромінювати електромагнітні хвилі. Цей процес супроводжуватиметься втратою енергії, у результаті чого електрони впадуть на ядро. Прості оцінні розрахунки свідчать, що тривалість життя такого атома не перевищуватиме 10^{-11} с. Отже, з погляду класичної електродинаміки атом у вигляді планетарної моделі взагалі існувати не може.

Відповідно до планетарної моделі атома електрон може обертатися навколо ядра за всіма можливими орбітами. Для кожного радіуса обертання існує своя певна енергія E електрона на орбіті. Оскільки можливих орбіт безліч, то виходить, що електрон має *неперервний спектр енергій*. Це означає, що, якщо електрон переходить з однієї орбіти на іншу, атом мусить випромінювати не дискретну, а будь-яку порцію енергії. Отже, атомарний спектр випромінювання повинен бути неперервним, а досліди свідчать, що він дискретний.

Таким чином, з одного боку, досліди Резерфорда підтвердили планетарну модель атома, з іншого боку, ця модель виявилася не спроможною пояснити низку чітко встановлених експериментальних фактів. Необхідно було вводити у фізику нові уявлення. Цей революційний крок здійснив Нільс Бор.

2.2. Атомні спектри водню

Вивчення атомних спектрів сприяло встановленню внутрішньої будови атомів. Усе почалося з найпростішого елемента — водню. З'ясувалося, що спектри *атомарного водню* складаються з окремих

(дискретних) вузьких спектральних ліній; такі спектри назвали *лінійчастими*.

Вивчаючи лінійчастий спектр атомарного водню, Бальмер (1885) установив певну залежність, яка в сучасному записі має вигляд

$$\omega = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots), \quad (2.9)$$

де ω — циклічна частота кожної спектральної лінії ($\omega = 2\pi c / \lambda$), $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ — стала Рідберга.

Залежність (2.9) називають *формулою Бальмера*, відповідну серію спектральних ліній — *серією Бальмера* (рис. 2.4). Чотири перші лінії цієї серії H_α , H_β , H_γ , H_δ розміщені у видимій частині спектра, інші — в ультрафіолетовій частині спектра.

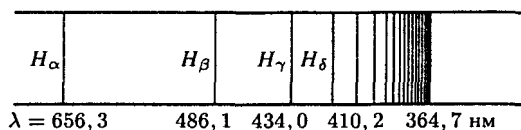


Рис. 2.4

Зазначимо, що в спектроскопії традиційно характеризують спектральні лінії *спектральним хвильовим числом* — це кількість довжин хвиль, що вміщуються в 1 см, тобто величина, обернена до

довжини хвилі: $\nu^* = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi c}$ (не плутати з хвильовим числом

$k = 2\pi / \lambda$). Формула Бальмера для спектрального хвильового числа має такий самий вигляд, як і формула (2.9)

$$\nu^* = \frac{1}{\lambda} = R^* \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2.10)$$

де $R^* = R / 2\pi c = 109737,31 \text{ см}^{-1}$.

Наступні дослідження показали, що існують ще кілька серій. В ультрафіолетовій частині спектра — *серія Лаймана* (1906):

$$\omega = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (2.11)$$

Інші дослідження лежать в інфрачервоній частині спектра: *серія Пашена* (1908)

$$\omega = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 4, 5, 6, \dots); \quad (2.12)$$

серія Брекета (1922)

$$\omega = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 5, 6, 7, \dots); \quad (2.13)$$

серія Пфунда (1924)

$$\omega = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 6, 7, 8, \dots). \quad (2.14)$$

Усі серії можна подати у вигляді *узагальненої формули Бальмера*

$$\omega = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2.15)$$

де $m = 1$ для серії Лаймана, $m = 2$ для серії Бальмера і т.д. Якщо m задано, то n набуває всіх цілих значень, починаючи з $m+1$.

Очевидно, що в разі $n \rightarrow \infty$ частота прямує до граничного (максимального) значення R/m^2 , яке називають *межею серії*. Для серії Бальмера, наприклад, у довжинах хвиль вона дорівнює мінімальному значенню

$$\lambda_{\infty} = \frac{2\pi c}{\omega_{\infty}} = \frac{2\pi c}{R/4} = \frac{4}{R^*} = 364,5 \text{ нм},$$

що близьке до експериментального значення $\lambda_{\infty} = 364,7 \text{ нм}$ (рис. 2.4).

У разі наближення до межі серії спектральні лінії розміщуються щільніше — різниця довжин хвиль між ними асимптотично прямує

до нуля (рис. 2.4). За межею спектр не обривається, а стає суцільним. Ця закономірність проявляється в спектральних серіях не тільки атомарного водню, але й у спектральних серіях атомів інших хімічних елементів.

Головним законом спектроскопії, установленим емпірично, є *комбінаційний принцип Рітца* (1908). Він полягає в тому, що все різноманіття спектральних ліній атома можна отримати шляхом попарних комбінацій значно меншої кількості величин — *спектральних термів* — величин вигляду

$$\frac{R}{1^2}, \frac{R}{2^2}, \frac{R}{3^2}, \dots \quad (2.16)$$

Зокрема, частоту будь-якої лінії атомарного спектра водню можна уявити як різницю двох чисел ряду (2.16). Так, наприклад, частота першої лінії серії Бальмера дорівнює $T(2) - T(3)$, другої лінії серії Пфунда $T(5) - T(7)$ і т.д. У загальному випадку

$$\omega_{nm} = T(m) - T(n), \quad (2.17)$$

де $T(m) = R/m^2$; $T(n) = R/n^2$ — спектральні терми.

Зміст цього принципу став зрозумілим після того, як були сформульовані постулати Бора, який перший показав, що комбінаційний принцип є проявом квантових законів руху в атомі.

2.3. Постулати Бора. Досліди Франка і Герца

Нестійкість планетарної моделі Резерфорда, чітка закономірність у розміщенні дискретних ліній атомарних спектрів змусили Н. Бора для пояснення будови атома водню сформулювати (1913) два важливі квантові постулати:

1. Атом тривалий час може перебувати лише в певних *стаціонарних станах*, які характеризуються дискретними значеннями енергій E_1, E_2, E_3, \dots . Перебуваючи у цих станах, атом, всупереч класичній електродинаміці, не випромінює енергію, тому вони (стани) називаються стаціонарними.

Зауважимо, що до стаціонарних станів належать і збуджені стани. Час перебування у збудженому стані становить близько

10^{-8} с. У макроскопічному масштабі такий час надто малий. Проте за атомною шкалою часу він досить великий, оскільки на багато порядків перевищує період обертання електрона навколо ядра. Зокрема, для атома водню період обертання електрона навколо протона становить приблизно 10^{-16} с.

2. Під час переходу атома зі стаціонарного стану з більшою енергією E_n у стаціонарний стан з меншою енергією E_m ($E_n > E_m$) відбувається випромінювання фотона з енергією $\hbar\omega$:

$$E_n - E_m = \hbar\omega_{nm}. \quad (2.18)$$

Таке саме співвідношення виконується і в разі поглинання, коли падаючий фотон переводить атом з нижнього енергетичного рівня E_m на більш високий енергетичний рівень E_n , а сам при цьому зникає. Співвідношення (2.18) називають *правилом частот Бора*.

Існування дискретних енергетичних рівнів було підтверджено дослідями Франка і Герца (1913). Зміст їх дослідів полягає в такому. Під час *непружного зіткнення* електрона з атомом енергія від електрона передається атому. Якщо внутрішня енергія атома має неперервний спектр енергій, то атому від електрона може бути передана будь-яка порція енергії. Якщо ж атомарні енергетичні стани дискретні, то його внутрішня енергія в разі зіткнення з електроном повинна змінюватися дискретно, тобто на величини, що дорівнюють різниці між внутрішніми енергіями атома у стаціонарних станах.

Отже, у разі *непружного зіткнення* електрон здатен передати атому лише дискретну порцію енергії. Вимірюючи енергію, яку передає електрон атому, можна визначити значення внутрішніх енергій стаціонарних станів атома.

Схему дослідної установки Дж.Франка і Г. Герца зображено на рис. 2.5. У балоні з парами ртуті під тиском 1 мм рт. ст. (133,3 Па) розміщено три електроди: К — катод, С — сітка, А — анод. Електрони, випромінювані розжареним катодом унаслідок термоелектронної емісії, прискорюються різницею потенціалів V між катодом і сіткою. Величину V можна плавно змінювати. Між сіткою і анодом створювалось невелике *гальмівне поле* з різницею потенціалів близько 0,5 В.

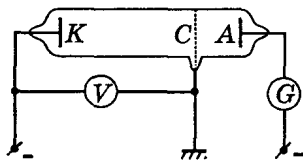


Рис. 2.5

Очевидно, якщо електрон, пройшовши крізь сітку, має енергію, меншу за $0,5 \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$), то він не долетить до анода. Лише ті електрони, енергія яких під час проходження сітки перевищує $0,5 \text{ eV}$, потраплять на анод, створюючи анодний струм.

У дослідах вимірювався анодний струм I (гальванометр G) залежно від прискорювальної напруги U (вольтметр V) — вольт-амперна характеристика. Залежність $I = I(U)$ зображено на рис. 2.6. З'ясувалося, що відстань між двома послідовними максимумами становить $4,9 \text{ В}$. Це означає, що першому максимуму відповідає напруга $4,9 \text{ В}$. Усі інші максимумами кратні цій величині. Очевидно, що зафіксованим максимумам відповідають значенням енергій: $E_1 = 4,9 \text{ eV}$, $E_2 = 2E_1$, $E_3 = 3E_1$ і т.д.

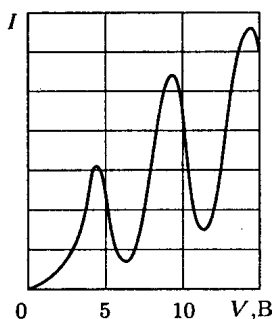


Рис. 2.6

Щоб пояснити такий хід вольт-амперної характеристики, необхідно припустити, що при зіткненні електронів з атомами ртуті останні можуть поглинути тільки дискретні порції енергії, кратні

4,9 еВ. Справді, якщо енергія електронів менша за 4,9 еВ, то їх взаємодія з атомами ртуті може мати лише характер *пружного удару* (без зміни внутрішньої енергії атомів). Оскільки маса атома ртуті перевищує масу електрона майже в 400 тисяч разів, то внаслідок пружного зіткнення електрона з атомом він відскакує від неї, як від нерухомої стінки, змінюючи тільки напрям свого руху. Звісно, що такі електрони, зберігши кінетичну енергію, здатні подолати гальмівну різницю потенціалів 0,5 В (або, що те саме, енергетичний бар'єр 0,5 еВ).

Отже, поки енергія електронів не досягне значення 4,9 еВ, вони зазнаватимуть з атомами ртуті лише пружних зіткнень, тому струм зростатиме зі збільшенням прискорювальної напруги V .

Якщо ж прискорювальна напруга досягає значення $U = 4,9$ В (енергія електронів 4,9 еВ), електрони поблизу сітки починають зазнавати *непружних зіткнень, віддаючи атомам ртуті всю енергію*. Ці електрони не можуть подолати гальмівну різницю потенціалів, тому, починаючи з напруги $U = 4,9$ В, анодний струм буде спадати. За подальшого зростання прискорювальної напруги достатня кількість електронів після *непружного зіткнення* встигне набути енергію, необхідну для подолання гальмівного поля за сіткою. Починається нове зростання струму I .

Досягнувши різниці потенціалів $U = 9,8$ В, електрони після першого непружного зіткнення дістаються сітки, маючи енергію 4,9 еВ, що достатньо для другого непружного зіткнення. Після другого непружного удару електрони втрачають усю свою енергію, тому анодний струм знову починає зменшуватися (другий мінімум на рис. 2.6). Наступні максимуми й мінімуми пояснюються аналогічно.

Наведені дослідні дані свідчать, що різниця між енергіями основного стану атома ртуті і найближчого збудженого стану становить 4,9 еВ, що доводить дискретність внутрішньої енергії атома. Наявність дискретних енергетичних рівнів було підтверджено також і для інших атомів. Отже, *стан атомних систем змінюється лише дискретно*.

Досліди Франка і Герца підтверджують також і другий постулат Бора — правило частот. Під час експерименту було зафіксовано,

що для $U = 4,9$ В пара ртуті починає випромінювати ультрафіолетове світло з довжиною хвилі $\lambda = 253,7$ нм. Це випромінювання зумовлено переходами атомів ртуті з першого збудженого стану в основний ($E_2 - E_1 = 4,9$ еВ). Згідно з виразом (2.18)

$$E_2 - E_1 = \hbar\omega = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{T} = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

звідки для λ дістаємо

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,533 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 253,3 \text{ нм},$$

що добре узгоджується з експериментальним значенням.

2.4. Борівська модель атома водню та воднеподібних іонів

Нільс Бор, створюючи модель атома водню, для спрощення припустив, що електрон обертається навколо ядра коловою орбітою. Пізніше Арнольд Зоммерфельд узагальнив теорію Бора на випадок еліптичних орбіт. З'ясувалося, що врахування еліптичності електронних орбіт в атомі водню не змінює виразів для енергії стаціонарних станів, а отже, абсолютно не впливає на результати Н. Бора. Тому обмежимося випадком тільки колових орбіт.

За припущенням Н. Бора стаціонарними є лише ті орбіти, для яких момент імпульсу L електрона квантується

$$L = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.19)$$

Це *правило квантування орбіт*.

Радіус Бора. За допомогою правила квантування можна знайти радіуси колових стаціонарних орбіт атома водню і відповідні їм енергії. Те саме можна зробити для воднеподібних іонів, тобто «атомів» із зарядом ядра Ze , навколо якого обертається *один електрон*. Наприклад, якщо $Z = 2$, маємо одноразово іонізований атом гелію He^+ , для $Z = 3$ — дворазово іонізований атом літію Li^{2+} і т.д.

Нехай заряд ядра воднеподібного іона Ze . Маса ядра значно більша за масу електрона, тому ядро можна вважати нерухомим, а електрон рухається навколо ядра по коловій орбіті радіусом r . Електрон притягується до ядра кулонівською силою, яка за другим законом Ньютона дорівнює доцентровому прискоренню v^2/r , помноженому на його масу:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.20)$$

Згідно з правилом квантування орбіт (2.19) $L = m_e v r = n\hbar$, звідки

$$v = n\hbar / m_e r. \quad (2.21)$$

Після підставлення виразу (2.21) у співвідношення (2.20) дістаємо вираз для радіуса n -ї стаціонарної орбіти:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{Ze^2 m_e} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.22)$$

Радіус першої стаціонарної орбіти електрона в атомі водню ($n = 1$, $Z = 1$) називають *борівським радіусом*:

$$r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 0,529 \text{ \AA}. \quad (2.23)$$

Розміри атома, а саме його діаметр приблизно становить один ангстрема. Отже, отримано правильну величину, адже до цього часу ніяких теоретичних розрахунків щодо розміру атома не було.

Енергія стаціонарних орбіт. Внутрішня енергія атома водню та воднеподібних іонів складається з кінетичної енергії електрона (ядро нерухоме) $m_e v^2 / 2$ і потенціальної енергії його взаємодії з ядром $-Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$ — *від'ємна величина*. Отже, повна енергія атома водню

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.24)$$

Із виразу (2.20) випливає, що $m_e v^2 / 2 = Ze^2 / (8\pi\epsilon_0 r)$, тоді для повної енергії

$$E = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.25)$$

Підставивши у рівність (2.25) вираз (2.22) для r_n , знаходимо енергію електрона на n -й стаціонарній орбіті:

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (2.26)$$

Як видно із формули (2.26), внутрішня енергія набуває *від'ємних дискретних значень*. Такі значення відповідають *зв'язаним станам* електрона, тобто коли електрон і ядро утворюють єдину систему — атом. Отже, *ядро і електрон утворюють зв'язану систему лише у випадку дискретного енергетичного спектра*.

За умови $n \rightarrow \infty$ енергетичні рівні розміщуються дедалі щільніше, наближаючись до своєї межі $E_\infty = 0$. Вище цієї межі енергетичний спектр неперервний (суцільний) і має додатні значення енергій. Ці значення енергій відповідають *незв'язаним станам електрона*, коли він (електрон) може як завгодно далеко віддалятися від ядра. У цьому разі пару «електрон — ядро» можна лише умовно назвати атомом. Між неперервним і дискретним станами енергій можливі квантові переходи. Це проявляється у вигляді суцільного спектра випромінювання, який накладається на лінійчастий. Ось чому спектр атома не закінчується на межі серії, а продовжується за нею у бік коротких хвиль, де він стає суцільним.

Схема енергетичних рівнів. Енергія іонізації. Для атома водню ($Z=1$) схему енергетичних рівнів, побудовану за допомогою формули (2.26), зображено на рис. 2.7. Стан атома з найменшою енергією називають *основним або нормальним*. За формулою (2.26) атому водню в основному стані ($n=1$) відповідає енергія $E_1 = -13,6$ еВ (добре узгоджується з результатами експерименту).

Для воднеподібних іонів $E_1 = -Z^2 \cdot 13,6$ еВ.



Рис. 2.7

Саме таке явище, наприклад, відбувається в разі зовнішнього фотоефекту.

На енергетичному рівні с $n = \infty$ енергія зв'язку електрона з ядром дорівнює нулю $E_{\infty} = 0$, тому *мінімальна енергія* іонізації n -го рівня визначається виразом: $E_{\text{іон}} = E_{\infty} - E_n = -E_n$. Слово *мінімальна* підкреслює той факт, що видалений електрон, потрапивши в область суцільного спектра, має нульову кінетичну енергію.

Для атома водню мінімальна енергія іонізації основного стану ($n = 1$) дорівнює $E_{\text{іон}} = -E_1 = 13,6$ еВ, і ця ж величина також є енергією зв'язку електрона з ядром в основному стані $E_{\text{зв}} = E_{\text{іон}}$.

У загальному випадку видалений електрон у межах суцільного спектра може мати *різні неперервні значення кінетичної енергії*. Тому в разі його захоплення іонізованим атомом повинна звільнитися енергія $\hbar\omega_{\infty} + E_{\text{кін}}$.

Згідно з правилом частот Бора вона буде дорівнювати

$$\omega = \frac{\hbar\omega_{\infty} + E_{\text{кін}}}{\hbar} = \omega_{\infty} + \frac{E_{\text{кін}}}{\hbar}. \quad (2.27)$$

Якщо атом поглинає енергію іззовні (наприклад, в результаті поглинання світла), то енергія електрона збільшується і він переходить на більш високу орбіту, або, що те саме, на вищій енергетичний рівень. Перехід атома з основного стану на вищій енергетичний рівень дискретного спектра — це *процес збудження атома*. Перехід же атома з одного з дискретних енергетичних рівнів в область суцільного спектра перетворює атом у незв'язану систему — *іонізація атома*.

Отже, процес іонізації — це видалення електрона з дискретного n -го рівня за межі атома (на нескінченність).

Як бачимо, випромінювальна частота більша за частоту межі серії ω_∞ на величину $E_{\text{кін}}/\hbar$, яка характеризується неперервними значеннями енергій. Отже, під час деіонізації (процес зворотний іонізації) випромінюватиметься *суцільний спектр енергій*, який примикає до межі серії.

Спектральні серії. Теорія Бора пояснює наявність лінійчастих спектрів випромінювання атомів водню та фізичне походження сталої Рідберга. Відповідно до другого постулату Бора (див. формулу (2.18)) випромінювальну частоту можна подати у вигляді

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \frac{E_n}{\hbar} - \frac{E_m}{\hbar} = \left(-\frac{E_m}{\hbar}\right) - \left(-\frac{E_n}{\hbar}\right) \quad (2.28)$$

(енергії зв'язаних станів електрона від'ємні, тому вирази у дужках додатні). Зіставлення із формулою (2.15) дає формулу

$$T(m) = \frac{R}{m^2} = -\frac{E_m}{\hbar}, \quad T(n) = \frac{R}{n^2} = -\frac{E_n}{\hbar}.$$

Отже, *спектральні терми визначаються енергіями стаціонарних станів*, відрізняючись від них лише постійним множником $(-1/\hbar)$. На відміну від енергії терм є додатною величиною, тому чим нижче розміщується енергетичний рівень (тобто менше значення m , або n), тим більша величина терма.

Запишемо частоту випромінювання в атомарному водні ($Z = 1$) з урахуванням виразу для енергії (2.26)

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (2.29)$$

Це узагальнена формула Бальмера (2.15), де стала Рідберга

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e e^4}{2\hbar^3}. \quad (2.30)$$

Підставивши у вираз (2.30) числові значення m , e і \hbar , матимемо вже відому величину, $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ (у довжинах хвиль $R^* = R/2\pi c = 109737,31 \text{ см}^{-1}$).

У формулі (2.30) індекс « ∞ » означає, що стали Рідберга отримано за припущення, що маса ядра нескінченно велика, а ядро нерухоме. У цьому наближенні стала Рідберга однакова для всіх воднеподібних іонів, і саме цю величину наводять у довідниках.

Для отримання точнішого значення потрібно врахувати рух ядра й електрона навколо спільного центра мас. Відповідний розрахунок показує, що в цьому випадку у формулі (2.30) масу електрона m_e слід замінити на зведену масу $\mu = Mm_e / M + m_e$, де M — маса ядра. Тоді

$$R = \frac{R_\infty}{1 + m_e / M}. \quad (2.31)$$

Для атома водню, ядром якого є протон, формула (2.31) дає значення $R_H^{\text{теор}} = 109677,6 \text{ см}^{-1}$, яке більш точно збігається з експериментальним значенням $R_H^{\text{експ}} = 109678,576 \text{ см}^{-1}$, ніж величина $R / 2\pi c = 109737,31 \text{ см}^{-1}$.

Принцип відповідності Бора. Поблизу межі $E_\infty = 0$ (рис. 2.7), коли дискретність рівнів майже зникає, квантова система має поводитися, як класична. Це положення, висунуте Бором, отримало назву *принцип відповідності Бора*. Цей принцип мав важливу роль на першому етапі розвитку квантової фізики. Відповідно до нього квантова фізика повинна переходити в класичну в разі великих значень квантових чисел.

Нагадаймо, що відповідно до законів класичної електродинаміки електрон, що обертається на орбіті, повинен випромінювати електромагнітні хвилі. Це супроводжується втратою енергії, унаслідок чого електрон, рухаючись по спіралі, мав би впасти на ядро. Навпаки, квантові постулати Бора стверджують, що випромінювання відбувається лише в разі переходу з однієї стаціонарної орбіти на іншу. Проте існують умови, коли ці дві фізичні картини дають однаковий результат. Це відбувається тоді, коли відстань між енергетичними рівнями мала порівняно з висотою самих рівнів. Тоді «сходинки», по яких відбувається перехід з одного рівня на інший, стають дрібними, і сходження по них мало чим відрізняється від неперервного ковзання.

Справді, оскільки енергія дискретних рівнів від'ємна, то зі збільшенням n вона зростає. Для великих $n \gg 1$ з виразу (2.26) для атома водню ($Z = 1$) випливає

$$\Delta E_n = E_n - E_{n-1} = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right) \approx \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{2}{n^3},$$

або

$$\Delta E_n = \frac{m_e e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^3} \Delta n,$$

де $\Delta n = 1$. З останнього співвідношення видно, що відстань між сусідніми ($\Delta n = 1$) енергетичними рівнями ΔE_n зменшується зі збільшенням n . Для великих n матимемо майже неперервну послідовність енергетичних рівнів, тому характерна особливість квантових переходів — дискретність — повинна згладитися.

Покажемо, що для великих квантових чисел частоти випромінювання, розраховані за класичними і квантовими законами, збігаються. Для цього розглянемо перехід між двома сусідніми орбітами з великими радіусами, тобто покладемо, що квантові числа n і $m = n - 1$ великі. У разі великих квантових чисел використаємо відоме наближене співвідношення

$$\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \approx \frac{2}{n^3}.$$

Тоді з урахуванням виразу для сталої Рідберга (2.30) квантова частота випромінювання в разі переходу з n -ї орбіти на $n-1$ дорівнюватиме:

$$\omega_{\text{кв}}^n = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \frac{2}{n^3} = \frac{m_e e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^3 n^3}. \quad (2.32)$$

Запишемо частоту обертання електрона на орбіті через швидкість з урахуванням формули (2.21)

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{n\hbar}{m_e r^2}.$$

Підставивши сюди r_n з виразу (2.22), знайдемо частоту обертання електрона в атомі водню на n -й стаціонарній орбіті

$$\omega^n = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3} = R \frac{2}{n^3}.$$

За класичною електродинамікою такою самою повинна бути й частота електромагнітного випромінювання, тому

$$\omega^n = \omega_{\text{кл}}^n = R \cdot \frac{2}{n^3} = \frac{m_e e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3 n^3}. \quad (2.33)$$

Порівняння виразів (2.32) і (2.33) показує, що у крайньому випадку малих частот (великих значень n) квантова частота випромінювання $\omega_{\text{кв}}^n$ збігається з частотою обертання електрона на орбіті, тобто з класичною частотою випромінювання $\omega_{\text{кл}}^n$. Це і є принцип відповідності Бора.

Недоліки теорії Бора. Теорія Бора була першим вагомим кроком у розвитку теорії атома. Вона чітко показала, що класичні закони фізики не спроможні описати внутрішньоатомні явища. Всередині атома домінують квантові закони.

Проте із самого початку в теорії Бора виявилися істотні недоліки. Перш за все ця теорія не була ні послідовно класичною, ні послідовно квантовою.

Після перших успіхів щодо пояснення будови атома водню проявилися її недоліки. Навіть для атома водню, даючи правильні значення частот спектральних ліній, теорія Бора не дозволяла розрахувати їх інтенсивності. Крім того, спроба використати цю теорію для пояснення будови атома гелію — найпростішого після водню атома — завершилася невдачею.

Відтак теорія Бора була дуже важливим, але лише перехідним етапом (так вважав і сам Н. Бор) від класичної фізики до квантової. Сьогодні Теорія Бора має переважно історичне значення, ніж наукове.



Запитання та завдання для самоконтролю

1. У чому полягає зміст дослідів Резерфорда і якими є їх наслідки?
2. Запишіть формулу Резерфорда та проаналізуйте процес розсіювання.
3. Як розподілено заряд в атомі? Чому модель атома Резерфорда суперечить уявленням класичної фізики?
4. Які особливості спектра атома водню? Що називають спектральними серіями і якою формулою вони описуються?
5. Що називають комбінаційним принципом Рітца?
6. У чому полягає зміст дослідів Франка і Герца?
7. Сформулюйте постулати Бора. Використовуючи борівську модель атома, виведіть формули для радіусів і енергій стаціонарних орбіт.
8. Який вигляд має схема енергетичних рівнів атома водню? Що називають енергією іонізації? Розрахуйте величину енергії іонізації основного стану атома водню.
9. Поясніть походження сталої Рідберга, користуючись теорією Бора.
10. У чому полягає зміст принципу відповідності Бора?
11. Наведіть головні недоліки теорії атома Бора.



Задачі

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Розрахувати радіус другої орбіти електрона в атомі водню та його швидкість на ній.

Розв'язання. Згідно з правилом квантування орбіт радіус r_n орбіти електрона та його швидкість v_n на ній пов'язані співвідношенням

$$m_e v_n r_n = n\hbar, \quad (1)$$

де $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг — маса електрона; $n = 1, 2, 3, \dots$ — головне квантове число; $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — стала Планка.

Електрон притягується до ядра кулонівською силою $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — величина заряду електрона і протона, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), яка надає йому доцентрового (нормального) прискорення $a = v_n^2 / r$. На підставі другого закону Ньютона можна записати:

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}. \quad (2)$$

У результаті спільного розв'язку рівнянь (1) і (2) отримуємо

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e e^2}. \quad (3)$$

Використовуючи формулу (3), виконаємо обчислення:

$$r_2 = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (1,05 \cdot 10^{-34})^2 \cdot 2^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2,12 \text{ \AA}.$$

Зі співвідношення (1) знаходимо вираз для швидкості електрона на n -й орбіті:

$$v_n = \frac{\hbar n}{m_e r_n}. \quad (4)$$

Підставивши числові значення у формулу (4) для $n = 2$, дістаємо:

$$v = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 2}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 2,12 \cdot 10^{-10}} = 1,09 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Визначити потенціал іонізації основного стану та перший потенціал збудження атома водню.

Розв'язання. Потенціалом іонізації основного стану $U_{\text{іон}}$ називають найменшу різницю потенціалів, яку має пройти в прискорювальному полі електрон, щоб при зіткненні з незбудженим атомом водню іонізувати його, тобто перевести його електрон з першої борівської орбіти $m = 1$ на нескінченно

віддалену орбіту $n = \infty$, де енергія електрона дорівнює нулю. Очевидно, що робота, необхідна для видалення електрона з атома $A_{\text{іон}}$, має дорівнювати роботі сил електричного поля, що прискорює електрон

$$A_{\text{іон}} = eU_{\text{іон}}. \quad (1)$$

Таку саму роботу може виконати поглинутий атомом квант світла з енергією $\hbar\omega = A_{\text{іон}}$. Застосувавши узагальнену формулу Бальмера $\omega = R(1/m^2 - 1/n^2)$, де $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ — стала Рідберга, $m = 1$, $n = \infty$, дістаємо:

$$A_{\text{іон}} = \hbar\omega = \hbar R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \hbar R. \quad (2)$$

Зі співвідношень (1) і (2) випливає, що

$$U_{\text{іон}} = \frac{\hbar R}{e} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 2,07 \cdot 10^{16}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 13,6 \text{ В}. \quad (3)$$

Перший потенціал збудження U_1 — найменша різниця потенціалів, яку повинен пройти в прискорювальному полі електрон, щоб зіштовхнувшись з незбудженим атомом перевести його у перший збуджений стан. Для атома водню це відповідає переходу електрона з першої борівської орбіти $m = 1$ на другу $n = 2$.

Як і для попереднього випадку (2), можна записати співвідношення

$$eU_1 = \hbar\omega = \hbar R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{3}{4} \hbar R, \text{ звідки}$$

$$U_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\hbar R}{e} = \frac{3}{4} \cdot 13,6 \text{ В} = 10,2 \text{ В}.$$

Задача 3. На дифракційну ґратку з періодом 5 мкм за нормаллю падає пучок світла від газорозрядної трубки, заповненої атомарним воднем. Виявилось, що у спектрі дифракційний максимум п'ятого порядку, спостережуваний під кутом 7° , відповідає одній з ліній серії Лаймана. Визначити головне квантове число енергетичного рівня, з якого відбувся перехід.

Розв'язання. З умови для головних максимумів дифракційної ґратки $d \sin \varphi = k\lambda$ визначимо довжину світлової хвилі:

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{k}. \quad (1)$$

Подамо узагальнену формулу Бальмера у вигляді

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

і врахуємо, що для серії Лаймана $m = 1$, тоді

$$\frac{2\pi c}{\lambda} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (2)$$

Комбінуючи вирази (1) і (2), дістаємо:

$$\frac{2\pi c k}{d \sin \varphi} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \text{ звідки}$$

$$n = \left(1 - \frac{2\pi c \cdot k}{R d \cdot \sin \varphi} \right)^{-1/2}.$$

Підставивши числові значення, знаходимо:

$$n = \left(1 - \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5}{2,07 \cdot 10^{16} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,122} \right)^{-1/2} = 2.$$

Отже, перехід відбувся з другого енергетичного рівня на перший.

Аудиторні задачі

1. Після проходження фольги із золота α -частинка з енергією 0,3 МеВ відхилилася на кут 60° . Розрахувати прицільну відстань. ($4,9 \cdot 10^{-12}$ см)

2. Чому дорівнює прицільна відстань розсіювання, якщо α -частинка з кінетичною енергією 8 МеВ на ядрі золота розсіялась під кутом 45° ? ($3,4 \cdot 10^{-12}$ см)

3. На яку мінімальну відстань наблизиться α -частинка з енергією 10 МеВ у разі лобового зіткнення з ядром золота ($Z = 79$)? ($2,3 \cdot 10^{-12}$ см)

4. Визначити частоти обертання електрона в атомі водню на другій і третій орбітах. Порівняти їх з частотою випромінювання в разі переходу електрона з третьої на другу орбіту. ($8,2 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$; $2,4 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$; $4,6 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$)

5. Для електрона атома водню, що перебуває на першій борівській орбіті, знайти частоту обертання, силу колового струму, магнітну індукцію в центрі колової орбіти та орбітальний магнітний момент. ($6,6 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$; 1,06 мА; 12,6 Тл; $0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}$)

6. Атом водню збуджений так, що його електрон перейшов на дев'ятий енергетичний рівень. Яку максимальну кількість спектральних ліній можна спостерігати в разі повернення атома водню до нормального стану? ($n(n-1)/2 = 36$)

7. Знайти різницю іонізаційних потенціалів атома водню і дейтерію. (3,7 мВ)

8. Визначити енергію фотона, який відповідає другій лінії в першій інфрачервоній серії (серії Пашена) атома водню. (0,97 еВ)

9. Знайти найбільшу і найменшу довжини хвиль у першій інфрачервоній серії спектра атома водню (серії Пашена). (1,87 мкм; 820 нм)

10. На атом водню падає фотон і вибиває з нього електрон, кінетична енергія якого 3,22 еВ. Чому дорівнює довжина хвилі такого світла, якщо атом перебуває у першому збудженому стані? (187 нм)

11. Радіоастрономами зафіксовано випромінювання атомарного водню в міжзоряному просторі на довжині хвилі 21 см. Застосовуючи принцип відповідності Бора, визначити найменше значення номера енергетичного стану, з якого можливий такий перехід. ($n = 166$)

Навчальний елемент 3

ЕЛЕМЕНТИ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

Квантовою або хвильовою механікою називають розділ теоретичної фізики, що вивчає закони руху частинок у дуже обмеженій частині простору. У разі руху частинок зі швидкостями $v \leq c$, де c — швидкість світла у вакуумі, застосовується нерелятивістська квантова механіка, якщо $v \sim c$ вона замінюється релятивістською механікою. Будемо розглядати лише нерелятивістську квантову механіку, об'єктами дослідження якої є кристали, молекули, атоми, атомні ядра та елементарні частинки.

3.1. Хвильові властивості речовин

Вивчення природи світла дало змогу переконатися, що в оптичних явищах спостерігається своєрідний *дуалізм* (від лат. *dualis* — двоїстий, подвійний). Поруч з такими властивостями світла, які переконливо свідчать про його хвильову природу (інтерференція, дифракція), існують явища (фотоефект, ефект Комптона, короткохвильова межа гальмівного рентгенівського випромінювання), що не менш переконливо підтверджують корпускулярну природу світла.

3.1.1. Гіпотеза де-Бройля

Луї де-Бройль (1924) поставив питання, чи не поширюється подібний корпускулярно-хвильовий дуалізм на матеріальні частинки, маса спокою яких, на відміну від фотона, відмінна від нуля. Якщо це так, то які хвильові властивості частинок речовини. Отже, де-Бройль висунув гіпотезу, що співвідношення $\varepsilon = \hbar\omega$

(1.24) і $p_\phi = \hbar k = 2\pi\hbar/\lambda = h/\lambda$ (1.55), притаманні фотонам, мають універсальний характер. Тобто матеріальним частинкам, які характеризуються енергією E та імпульсом p (*корпускулярні характеристики*) можна також приписати *хвильові характеристики* — довжину хвилі λ і частоту ω :

$$\lambda = 2\pi\hbar / p = h / p; \quad (3.1)$$

$$\omega = E / \hbar. \quad (3.2)$$

Знайдемо вирази для фазової та групової швидкостей поширення хвиль де-Бройля. Фазова швидкість визначається співвідношенням

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}, \quad (3.3)$$

де m — релятивістська маса частинки; v — її швидкість.

Оскільки $c > v$, то фазова швидкість хвиль де-Бройля більша від швидкості світла у вакуумі. Але відомо (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 5.2), що фазова швидкість не є швидкістю переміщення сигналу або енергії, тому вона може бути як меншою, так і більшою за швидкість світла c у вакуумі.

Групову швидкість знайдемо, використовуючи вираз

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Обмежимося нерелятивістським випадком для вільної частинки. Тоді $E = p^2/2m$ — кінетична енергія частинки і

$$u = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp} \left(\frac{p^2}{2m} \right) = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v \quad (3.4)$$

(можна переконатися, що для релятивістського випадку буде той самий результат).

Отже, *групову швидкість хвиль де-Бройля дорівнює швидкості матеріальної частинки*. Цей результат указує на прямий зв'язок де-бройлівських хвиль з рухомими матеріальними частинками.

Порівняння виразів (3.4) і (3.3) приводить до важливого універсального співвідношення

$$uv_{\phi} = c^2. \quad (3.5)$$

Формула (3.4) наводить на думку, що матеріальну частинку можна уявити у вигляді хвильового пакета. Така ідея видається привабливою, оскільки поєднує в собі хвильові й корпускулярні характеристики частинки. Проте вона виявилася хибною і ось чому. Усі складові хвилі, що входять до хвильового пакета, поширюються з різними швидкостями. Для хвиль де-Бройля характерна *велика дисперсія навіть у вакуумі*, тому хвильовий пакет швидко розпливається. Розрахунки показують, що для частинок порядку маси електрона пакет розпливається майже миттєво, у той час, як матеріальна частинка є стабільним утворенням.

З'ясуємо, у яких явищах можуть проявлятися хвильові властивості матеріальних частинок. Незалежно від фізичної природи хвиль у явищах інтерференції та дифракції безпосередньо вимірюваною величиною є довжина хвилі. Оцінимо за формулою (3.1) довжину хвилі де-Бройля електронів, що прискорюються різницею потенціалів $U \leq 10^4$ В. За такого значення прискорювальної напруги маса рухомого електрона майже не відрізняється від його маси спокою m_e . Швидкість електронів знаходимо, використовуючи закон збереження енергії

$$m_e v^2 / 2 = eU \Rightarrow v = \sqrt{2eU / m_e},$$

тоді довжина хвилі де-Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e}} = \frac{12,3}{\sqrt{U}} \cdot 10^{-8} \text{ см} = \frac{12,3}{\sqrt{U}} \text{ \AA}. \quad (3.6)$$

Для електронів, що прискорюються, наприклад, різницею потенціалів $U = 150$ В, довжина хвилі де-Бройля становить 1 \AA порядок величини довжин хвиль рентгенівських променів. Такий самий порядок величин мають сталі кристалічних ґраток. Тому для виявлення хвильових властивостей рухомих електронів слід користуватись кристалічною дифракційною ґраткою, як і під час

вивчення рентгенівського випромінювання. Зазначимо, що гіпотеза де-Бройля на той час була настільки фантастичною, що доволі тривалий час не підлягала експериментальній перевірці.

3.1.2. Експериментальне підтвердження гіпотези де-Бройля

Ідея дослідів полягала в такому. Якщо пучок електронів має хвильові властивості, то можна очікувати, що їх відбивання від *кристалічної ґратки* має такий самий дифракційний характер, як і у випадку рентгенівських променів.

Досліди Девіссона і Джермера. Пучок монохроматичних електронів спрямовувався перпендикулярно на відшліфовану поверхню монокристала нікелю, структура якого була добре відома з рентгеноструктурних досліджень. У положенні, зображеному на рис. 3.1, *а*, відшліфована поверхня містить лінійні ланцюги атомів, перпендикулярні до площини падіння. Відстань між цими ланцюгами становить $d = 2,15 \text{ \AA}$ (виміряна незалежно за дифракцією рентгенівських променів). Під час дослідів для кута $\varphi = 50^\circ$ і напруги $U = 54 \text{ В}$ детектор *D* зафіксував особливо чіткий максимум розсіяних від кристала електронів. Його можна трактувати як дифракційний максимум першого порядку від плоскої дифракційної ґратки. На рис. 3.1, *б* кожна точка являє собою проекцію лінійного ланцюга атомів, розміщених на прямій, перпендикулярній до площини падіння (площини рисунка).

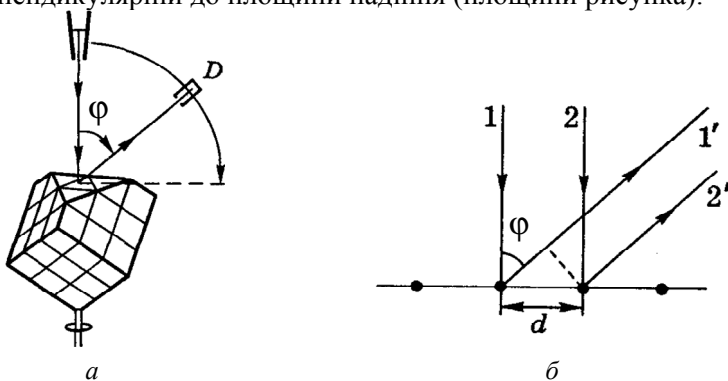


Рис. 3.1

Розрахована за формулою $\lambda = d \sin \varphi$ (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 3.6) довжина хвилі для $d = 2,15 \text{ \AA}$ і $\varphi = 50^\circ$ становить $\lambda = 1,65 \text{ \AA}$, а довжина хвилі де-Бройля, розрахована за формулою (3.6) у разі $U = 54 \text{ В}$, дорівнює $\lambda_B = 1,67 \text{ \AA}$. Довжини хвиль добре збігаються, що переконливо підтверджує гіпотезу де-Бройля.

Досліди Томсона і Гартаковського. Гіпотеза де-Бройля перевірялась багато разів. Зокрема, у дослідах Джозефа Томсона (1927) і незалежно від нього Петра Гартаковського пучок електронів, прискорених різницею потенціалів кілька десятків кіловольтів, пропускався крізь тонку полікристалічну металеву фольгу, за якою розміщувалась фотопластинка.

Структура полікристалічної металеві фольги являє собою набір хаотично орієнтованих монокристалічних *мікроблоків*, серед яких завжди знайдуться ті, які орієнтовані до падаючого пучка під кутом, що задовольняє формулу Бреґга–Вульфа: $2d \sin \vartheta = m\lambda$ (ϑ — кут ковзання; m — порядок дифракції, див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 5.7). Від таких монокристалічних блоків рентгенівські промені відбиватимуться під кутом ϑ , утворюючи в просторі конус. Якщо поставити на шляху відбитих (розсіяних) променів фотопластинку, розміщену перпендикулярно до напрямку первинного пучка, то дістанемо на ній низку концентричних кілець. Якщо електронам притаманні хвильові властивості, то на фотопластинці спостерігатимемо характерні концентричні дифракційні кільця. *Електронограму* золотої фольги зображено на рис. 3.2, а, а *рентгенограму* алюмінієвої — на рис. 3.2, б. Схожість обох дифракційних картин разюча.

Підозра, що система кілець на електронограмі породжується не електронами, а вторинним рентгенівським випромінюванням, що виникає під час падіння електронів на металеву фольгу, перевірялась за допомогою магнітного поля, створюваного на шляху розсіяних електронів. Піднесення постійного магніту до розсіяних електронів призводило до спотворення дифракційної картини. Це однозначно вказувало, що дифракційні кільця на електронограмі створені власне електронами, а не вторинним рентгенівським випромінюванням, на яке магнітне поле не діє.

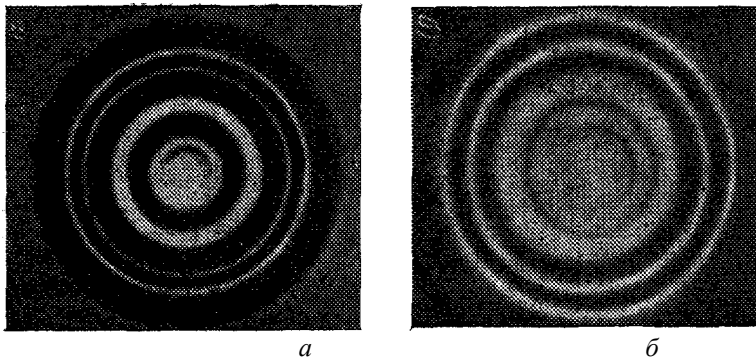


Рис. 3.2

У досліджах Клінтона Девіссона і Лестера Джермера, а також Дж. Томсона інтенсивність електронного пучка була великою, тому крізь кристалічні зразки проходила одночасно велика кількість електронів. Це давало підстави стверджувати, що дифракційна картина, тобто хвильові властивості притаманні лише великій кількості частинок, коли одночасно пролітає багато електронів. Але це не так. У 1949 р. були проведені досліді (В. Фабрикантом, Л. Біbermanом та М. Сушкіним), у яких електрони проходили крізь тонку фольгу поодиноч і кожний розсіяний електрон реєструвався на фотопластинці. З'ясувалося, що розсіяні окремі електрони потрапляли у різні точки фотопластинки на перший погляд хаотичним чином (рис. 3.3, *a*). Але за тривалої експозиції на фотопластинці виникала дифракційна картина (рис. 3.3, *б*), абсолютно ідентична до тієї, що утворена інтенсивним електронним пучком. Так було доведено, що хвильові властивості притаманні і для *окремого електрона*, а хвилі де-Бройля мають статистичний характер.

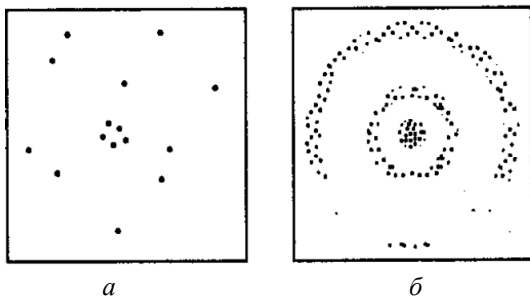


Рис. 3.3

Отже, електрони а також інші мікрочастинки (протони, нейтрони, атоми й молекули) характеризуються одночасно як корпускулярними, так і хвильовими властивостями.

Дифракційна картина, що виникає під час проходження електронів крізь кристали, є проявом статистичної закономірності. Це означає, що електрони з найбільшою ймовірністю потрапляють у світлі місця фотопластинки (світлі кільця) і з меншою — у темні місця (темні кільця) (див. рис. 3.2).

3.1.3. Принцип невизначеності

В атомній фізиці для опису дослідних фактів часто користуються класичними поняттями або матеріальної частинки (корпускули), або хвилі.

Наприклад, у камері Вільсона електрони залишають чіткі сліди, тобто поводяться як матеріальні частинки, що рухаються, зокрема, прямолінійними траєкторіями. Разом з тим під час проходження полікристалічної металеві фольги вони утворюють дифракційні кільця (див. рис. 2.9), тобто поводять себе як хвилі.

Звісно, наведені приклади свідчать про корпускулярно-хвильовий дуалізм, а також про те, що властивості *мікрочастинок* зовсім не схожі на поведінку оточуючих нас у повсякденному житті *макроскопічних* тіл.

Можливість одночасного визначення точного положення у просторі та швидкості є характерною властивістю макроскопічних тіл (матеріальних точок). Тому в класичній фізиці стан макроскопічних тіл (матеріальних точок) повністю й однозначно описується сукупністю всіх координат та всіх відповідних їм імпульсів.

Наявність у мікрочастинок, крім корпускулярних, також хвильових властивостей обумовлює існування принципової межі точності, з якою можна вказати та виміряти ці параметри.

Дифракція електронів на щілині. Доведемо, що одночасно точно визначити положення мікрочастинки у просторі та її імпульс неможливо.

Як приклад розглянемо дифракцію електронів на вузькій щілині (рис. 3.4).

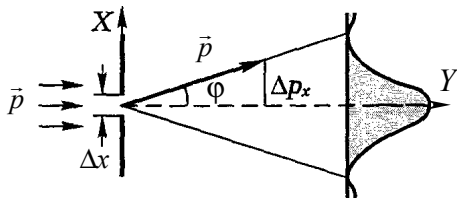


Рис. 3.4

Проходження електрона крізь щілину та реєстрація дифракційної картини якраз і є тим одночасним вимірюванням координати й імпульсу електрона, де ширина щілини Δx характеризує *невизначеність* (похибку) положення електрона в площині, перпендикулярній до напрямку первинного пучка. Справді, поява дифракційної картини свідчить лише про те, що електрон пройшов крізь щілину, але в якій точці щілини це відбулося невідомо.

Згідно з корпускулярними уявленнями виникнення на екрані дифракційної картини означає, що кожний окремий електрон, пройшовши крізь щілину, відхиляється або вгору, або вниз. Для цього він мусить дістати складову імпульсу Δp_x , при цьому повний імпульс залишається незмінним (до проходження щілини кожний електрон мав імпульс \vec{p} ($p_x = 0$, $p_y = p$, $p_z = 0$)).

Із рис. 3.4 видно, що

$$\Delta p_x = p \sin \varphi = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \varphi. \quad (3.7)$$

З іншого боку поява дифракційної картини зумовлюється хвилями де-Бройля, тому імпульс p беремо з виразу (3.1).

З оптики відомо (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 3.5), що мінімуми біля головного максимуму визначаються умовою, за якою різниця ходу хвиль від обох країв щілини дорівнює довжині хвилі, тобто

$$\Delta x \sin \varphi = \lambda. \quad (3.8)$$

Комбінуючи вирази (3.7) і (3.8), дістаємо

$$\Delta x \Delta p_x = 2\pi\hbar. \quad (3.9)$$

Якщо врахувати дифракційні максимуми вищих порядків, то співвідношення (3.9) набуває вигляду

$$\Delta x \Delta p_x = 2\pi n \hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \hbar. \quad (3.10)$$

Для двох інших координат можна записати аналогічні нерівності

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar, \quad (3.10a)$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \hbar \quad (3.10б)$$

Ці нерівності називають *співвідношеннями невизначеностей Гейзенберга для координат й імпульсів*.

Зауважимо, що в точних співвідношеннях (3.10), (3.10a) і (3.10б) під невизначеністю координат та імпульсів слід розуміти середньоквадратичні відхилення цих величин від їх середніх значень, а праворуч має стояти не h і не \hbar , а $\hbar/2$. Проте для більшості випадків принципово знати лише порядок величини.

Хоча матеріальну частинку і не можна уявити у вигляді хвильового пакета, тим не менше статистичний характер хвиль де-Бройля дозволяє зберегти хвильовий пакет як зручний опис хвильових властивостей мікрочастинок. В оптиці існує поняття часової когерентності (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 2.3.1), яке математично записується так:

$$\Delta \nu \Delta t \geq 1 \Rightarrow \Delta \omega \Delta t \geq 2\pi. \quad (3.11)$$

Зміст цього співвідношення полягає в тому, що обмежений у часі хвильовий процес не може бути монохроматичним. Якщо процес триває час Δt , то інтервал частот $\Delta \omega$, що входять до пакета, у кращому випадку задовольняє співвідношення (3.11). Тому, якщо для спостереження навіть монохроматичного процесу надано час Δt , то частота процесу буде знайдена щонайменше з похибкою $\Delta \omega \approx \frac{2\pi}{\Delta t}$.

Якщо частоту зіставити з енергією $E = \hbar \omega$, то з урахуванням виразу (3.11) дістаємо

$$\Delta E \Delta t \geq 2\pi \hbar \geq \hbar \quad (3.12)$$

— *співвідношення невизначеності Гейзенберга для часу й енергії*.

Проаналізуємо співвідношення невизначеностей Гейзенберга. Розглянемо спочатку невизначеність координат та імпульсів на прикладі нерівності (3.10). Вона стверджує, що якщо положення мікрочастинки (електрона) по осі X відоме з невизначеністю Δx , то в той самий момент часу проекцію імпульсу мікрочастинки на ту саму вісь можна виміряти лише з невизначеністю $\Delta p_x \approx \hbar / \Delta x$, тобто максимальна точність інформації про імпульс мікрочастинки не може перевищувати $\hbar / \Delta x$.

Оскільки \hbar є сталою величиною, то чим точніше вимірювання координати x (менша похибка Δx), тим з меншою точністю можна встановити імпульс p_x (більша похибка Δp_x), і навпаки. До проходження електрона крізь щілину його складова імпульсу p_x має точне значення $p_x = 0$ ($\Delta p_x = 0$), проте координата x є абсолютно невизначеною ($\Delta x \rightarrow \infty$). У момент проходження щілини положення змінюється. Замість абсолютної невизначеності координати x виникає невизначеність Δx , але вона досягається ціною втрати точного значення імпульсу p_x , тобто появою невизначеності Δp_x .

Отже, згідно зі співвідношеннями невизначеностей стала \hbar є тією абсолютною межею точності одночасного вимірювання координати й імпульсу, вийти за яку неможливо ні за яких умов. Зауважимо, що ці обмеження не стосуються одночасного вимірювання координати мікрочастинки по одній осі та проекції імпульсу — по іншій. Наприклад, величини x і p_y , y і p_z і т. д. можуть мати одночасно точні значення.

Зміст співвідношень (3.10)–(3.10б) такий: у природі об'єктивно не існують стани мікрочастинок з чітко визначеними значеннями обох змінних x і p_x . Але доводиться приписувати мікрочастинкам не властиві для них класичні змінні, оскільки вимірювання проводяться за допомогою макроскопічних приладів. Недоліки такого підходу й описуються співвідношеннями невизначеностей координат і імпульсу.

Невизначеність (3.12) означає, що для вимірювання енергії з похибкою ΔE потрібен час, не менший, ніж $\Delta t \approx \hbar / \Delta E$. Прикладом може бути розмивання енергетичних рівнів

воднеподібних систем (крім основного стану). Це зумовлено тим, що час життя в усіх збуджених (у квазістаціонарних) станах у випадку випромінювання видимого світла приблизно дорівнює 10^{-8} с, тоді величина енергетичного розмивання

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}}{10^{-8} \text{ с}} = 1,05 \cdot 10^{-26} \text{ Дж} \approx 0,66 \cdot 10^{-7} \text{ еВ},$$

що є незрівнянно менше, ніж відстані між самими енергетичними рівнями. Розмивання енергетичних рівнів призводить до так званого природного уширення спектральних ліній, яке спостерігається експериментально. Що стосується основного стану, то він існує нескінченно довго ($\Delta t \rightarrow \infty$) тому згідно з виразом (3.11) невизначеність енергії цього стану прямує до нуля $\Delta E \rightarrow 0$, тобто енергія основного стану має цілком визначену точну величину.

Невизначеність для макроскопічних тіл. Невизначеності В. Гейзенберга мають універсальний характер. З'ясуємо, як вони позначаються на русі *макроскопічних тіл*. Візьмемо кульку масою $m = 1 \text{ мг} = 10^{-3} \text{ г}$, яка повільно рухається в рідині. За допомогою мікроскопа визначимо положення її центра ваги з похибкою $\Delta x = 10^{-5} \text{ см}$. Це задовільна точність, яка зумовлена роздільною здатністю мікроскопа. Тоді невизначеність швидкості кульки становитиме: $\Delta v = \Delta p / m \approx \hbar / (m \Delta x) \sim 10^{-19} \text{ см/с}$. Очевидно, що невизначеність швидкості лежить далеко за межами будь-яких можливих вимірювань. Отже, для *макроскопічних тіл співвідношення Гейзенберга не відіграють ніякої ролі*. Цей висновок підтверджується і тим, що довжина де-Бройлівської хвилі навіть такого малого макроскопічного об'єкта, як кулька масою 1 мг за її швидкості в рідині $v = 10^{-4} \text{ см/с}$, становить $\lambda = h / p = h / mv \approx 10^{-19} \text{ см}$. Очевидно, що ця величина невимірно менша ніж розміри самого об'єкта, тому ніякі хвильові властивості за таких умов безумовно проявлятися не можуть.

Проте для електрона, маса якого $m_e = 0,911 \cdot 10^{-27} \text{ г}$ незрівнянно менша за масу кульки, матимемо інший результат. Нехай,

наприклад, потрібно встановити належність електрона певному атому. У цьому випадку можна вважати $\Delta x = 10^{-9}$ см, оскільки розміри атома мають порядок 10^{-8} см. Тоді невизначеність швидкості $\Delta v \approx 10^9$ см/с на цілий порядок величини перевищуватиме саму швидкість електрона на орбіті $v \approx 10^8$ см/с. Це свідчить про те, що в атомних системах співвідношення невизначеностей відіграють головну роль. Очевидно, що за умови $\Delta v \geq v$ уявлення про рух електрона по класичній коловій орбіті взагалі втрачає будь-який фізичний зміст. Ось чому, коли мікрочастинка рухається у дуже обмеженій частині простору, поняття траєкторії взагалі не існує.

Нехай частинка перебуває на обмеженій одновимірній ділянці розміром l і при цьому вона має енергію $E > E_{\min}$. Тоді її імпульс можна подати у вигляді $p = \langle p \rangle + \Delta p$. Подумки почнемо зменшувати енергію E , отже й імпульс $\langle p \rangle$. При цьому Δp не змінюватиметься, оскільки $\Delta p \approx \hbar/l$ згідно зі співвідношенням невизначеності для координат і імпульсів. Коли E дорівнюватиме E_{\min} , величина $\langle p \rangle$ перетвориться в нуль і залишиться тільки Δp . Звідси випливає, що для знаходження можливого значення мінімальної енергії E_{\min} частинки можна вважати, що $p \approx \Delta p$. Це співвідношення, зокрема, можна застосовувати для знаходження E_{\min} електрона в атомі водню. При цьому він рухається в околі радіуса r , тому невизначеність в його положенні можна припустити такою, що дорівнює $r \approx \Delta r$.

За певних умов рух мікрочастинки може бути класичним — мікрочастинка рухатиметься траєкторією. Повернемося до руху електронів у камері Вільсона, де їх траєкторії являють собою гірлянду дрібних краплинок туману, що виникають під час прольоту електрона в перегрітій рідині. Розміри краплинок — порядку 10^{-4} см, тому $\Delta x = 10^{-4}$ см, а відповідно до виразу (3.10) $\Delta p_x \approx 10^{-23}$ г·см/с — надто мала величина. Прямолінійні траєкторії електронів спостерігаються лише у випадку великих енергій, тому невизначеність імпульсу Δp_x на кілька порядків менша за

величину самого імпульсу електрона $\Delta p_x \ll p$. Отже, за такої умови електрон рухатиметься як класична частинка, тобто траєкторією. Узагалі, у разі великих енергій електронів (мікрочастинок) довжина хвилі де-Бройля буде малою, і так само, як в оптиці, у випадку малих довжин хвиль можна застосовувати геометричне наближення.

Співвідношення невизначеностей координат й імпульсів є одним з фундаментальних положень квантової механіки. Одних цих співвідношень достатньо для отримання важливих результатів, зокрема, таких.

1. Неможливий стан, у якому мікрочастинка перебуває у стані спокою. У цьому разі $\Delta x = 0$ і $\Delta p_x = 0$, що не задовольняє невизначеність (3.10).

2. Під час розгляду руху квантового об'єкта необхідно в багатьох випадках відмовитися від класичного поняття траєкторії.

3. Поділ повної енергії частинки як квантового об'єкта на потенціальну і кінетичну часто втрачає свій зміст. Справді, кінетична енергія залежить від імпульсу, а потенціальна — від координат. Ці ж динамічні змінні не можуть мати одночасно точно визначених значень.

3.2. Рівняння Шредінгера. Зміст хвильової функції

У квантовій *нерелятивістській* теорії рівняння Шредінгера (1926) відіграє таку саму фундаментальну роль, як рівняння руху (другий закон Ньютона) у класичній нерелятивістській механіці. Рівняння Шредінгера — диференціальне хвильове рівняння, яке описує зміну стану квантового об'єкта (мікрочастинки) з плином часу. Стан об'єкта характеризується хвильовою функцією; якщо відома хвильова функція в початковий момент часу, то, розв'язуючи рівняння Шредінгера, можна знайти хвильову функцію в будь-який наступний момент часу. Розглянемо, яким чином можна було дійти до встановлення цього рівняння.

Нехай *вільна мікрочастинка* рухається в просторі у певному напрямі. Згідно з ідеєю де-Бройля рух такої частинки описується *плоскою монохроматичною хвилею*

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (3.13)$$

(в оптиці монохроматична хвиля записувалась у вигляді $\sim e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, у квантовій механіці — у комплексно спряженому вигляді $\sim e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$). Обидва записи абсолютно рівноправні, проте в обох випадках фазою хвилі є вираз $\omega t - \vec{k}\vec{r}$.

Диференціюючи вираз (3.13) за x , дістаємо

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik_x \Psi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k_x^2 \Psi.$$

Такі самі співвідношення отримаємо в разі диференціювання за y і z . Склавши другі похідні та врахувавши співвідношення де-Бройля $\lambda = h/p \Rightarrow p = \hbar k$ (див. (3.1)), маємо

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Psi = -k^2 \Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi. \quad (3.14)$$

Тепер продиференціюємо (3.13) за часом за умови сталої частоти $\omega = E/\hbar$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi = -i\frac{E}{\hbar} \Psi. \quad (3.15)$$

Оскільки мікрочастинка *вільна*, то диференціальні рівняння (3.14) і (3.15) описують лише окремий випадок *рівномірного руху зі сталим імпульсом* (рівняння (3.14)) та *сталю кінетичною енергією*, яка для вільної частинки збігається з повною $E = p^2/2m$ (рівняння (3.15)). Потрібно знайти загальне рівняння, яке було б придатне для розв'язання *всіх*, а не тільки окремих задач. Таке рівняння можна отримати, поділивши рівняння (3.14) на рівняння (3.15):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi. \quad (3.16)$$

Рівняння (3.16) не містить ніяких індивідуальних параметрів, характерних для конкретного руху. Воно описує довільний рух мікрочастинки у вільному просторі. Це *рівняння Шредінгера для вільної частинки*.

Якщо частинка рухається в силовому полі, що характеризується потенціальною енергією $U = U(\vec{r}, t)$, то повна енергія E та імпульс p пов'язані співвідношенням

$$\frac{p^2}{2m} = E - U. \quad (3.17)$$

Знайшовши квадрат імпульсу $p^2 = -\frac{1}{\Psi} \hbar^2 \nabla^2 \Psi$ із рівняння (3.14), а повну енергію $E = \frac{1}{\Psi} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ із рівняння (3.15) та врахувавши співвідношення (3.17), дістанемо загальне рівняння Шредінгера для потенціального силового поля:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U(\vec{r}, t) \Psi, \quad (3.18)$$

де $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$ — хвильова або пси-функція, що характеризує стан мікрочастинки і яка може бути як дійсною, так і комплексною величиною; m — маса мікрочастинки; $U(\vec{r}, t)$ — потенціальна енергія, що відіграє роль силового поля і яка в загальному випадку залежить від часу; $\Delta \equiv \nabla^2$ — оператор Лапласа, результат дії якого на деяку функцію в декартовій системі координат є сумою других частинних похідних за координатами:

$$\nabla^2 \Psi = \partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2.$$

Спосіб, у який отримано рівняння Шредінгера, не може бути його доказом. Рівняння Шредінгера не можна чітко вивести, виходячи з класичних уявлень і теорій, проте справедливість його висновків підтверджується результатами експериментів.

Стационарні стани. Якщо силове потенціальне поле, в якому рухається мікрочастинка, *стационарне*, то функція U не залежить від часу $U = U(\vec{r})$. Маємо випадок стационарних станів, для яких усі спостережувані фізичні параметри не змінюються з плином часу. Сама хвильова функція Ψ до таких параметрів не належить. Вона є принципово не спостережуваною, але фізично спостережувані параметри можуть бути утворені за допомогою Ψ згідно з правилами квантової механіки.

Для стаціонарних станів хвильова функція частинки розкладається на два співмножники, один з яких залежить виключно від координат, другий — від часу

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t} = \psi(\vec{r})e^{-i\frac{E}{\hbar}t}. \quad (3.19)$$

Для знаходження функції $\psi(\vec{r})$ підставимо вираз (3.19) у рівняння (3.18) і отриманий результат скоротимо на загальний множник $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r})\psi = E\psi. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) називають *рівнянням Шредінгера для стаціонарних станів*. У найбільш поширеному вигляді воно записується так:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (3.21)$$

Очевидно, що для стаціонарних станів частота та повна енергія залишаються сталими величинами $\omega = \text{const}$, $E = \hbar\omega = \text{const}$.

Рух вільної мікрочастинки у загальному випадку описується рівнянням (3.16), Проте для *вільної* частинки $U = 0$ і не залежить від часу, тому частина розв'язку рівняння (3.16), що не залежить від часу, тобто функція $\psi(\vec{r})$, підкорюється рівнянню для стаціонарних станів (3.21), де $U = 0$.

Зміст хвильової функції. Розглянемо фізичний зміст розв'язків рівняння Шредінгера. Але спочатку запишемо класичне хвильове рівняння для електромагнітних хвиль (див. модуль 4 «Коливання і хвилі», підрозд. 4.2) у вигляді

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.22)$$

де $\Phi = \Phi(r, t)$ — будь-яка з компонент напруженості електричного або магнітного поля. Порівняємо це рівняння із хвильовим рівнянням Шредінгера для вільної частинки (3.16)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi.$$

Відомо, що класичне хвильове рівняння (3.22) має дійсні розв'язки вигляду $\Phi = A \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ (для спрощення вважатимемо, що початкова фаза дорівнює нулю). Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що ці дійсні розв'язки не задовольняють рівняння Шредінгера (3.16). Проте розв'язки у вигляді *комплексної функції* $\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ його задовольняють. При цьому, якщо A — дійсна величина, то дійсна частина функції $\Psi(\vec{r}, t)$ дорівнює $A \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$, тобто є розв'язками класичного хвильового рівняння.

Цей факт допомагає зрозуміти зміст хвильової функції. Він показує, що, хоча рівняння Шредінгера в деяких випадках задовольняється періодичними розв'язками, ніяких реальних хвиль, що поширюються в середовищі, воно не описує. Справді, у загальному випадку *пси-функція*, що визначає стан мікрочастинки в рівнянні Шредінгера, є *комплексною величиною*, у той час, як фізично спостережувані величини повинні бути *дійсними*. Ось чому *пси-функція* лише формально має хвильові властивості.

Фізичний зміст *пси-функції* в рівнянні Шредінгера розкрив Макс Борн (1926). Згадаймо, що хвильові властивості притаманні окремій мікрочастинці (електрону), а хвилі де-Бройля мають статистичний характер. Це означає, що рух будь-якої окремої мікрочастинки підлягає законам імовірності. Ураховуючи статистичний характер руху мікрочастинки, М. Борн дійшов висновку, що квадрат модуля *пси-функції* визначає ймовірність того, що в момент часу t мікрочастинка буде перебувати в межах об'єму dV :

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi\Psi^* dV, \quad (3.23)$$

де Ψ^* — комплексно-спряжена функція до Ψ . У формулі (3.23) ураховано, що *пси-функція* нормована, тобто виконується умова

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi\Psi^* dV = 1, \quad (3.24)$$

яка означає, що ймовірність знайти мікрочастинку в усьому просторі дорівнює одиниці, як імовірність достовірної події.

Щільність імовірності. Із формули (3.23) випливає, що квадрат модуля псі-функції має зміст *щільності ймовірності* — імовірність знаходження мікрочастинки в одиниці об'єму

$$\rho = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^* . \quad (3.25)$$

На відміну від *комплексної* псі-функції ця величина є *дійсною величиною*, тому експериментально спостережуваною. Щільність імовірності — величина, аналогічна інтенсивності світла, тому повинна бути квадратичною відносно хвильової функції, подібно до того як інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди хвилі.

З урахуванням початкової фази функції Ψ і Ψ^* для вільної мікрочастинки можна записати так:

$$\begin{aligned} \Psi &= A e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \equiv A_0 e^{i\varphi} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} ; \\ \Psi^* &= A^* e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \equiv A_0 e^{-i\varphi} e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} , \end{aligned}$$

де A_0 — дійсна стала величина. Очевидно, що їх добуток дорівнює квадрату дійсної амплітуди

$$\rho = \Psi\Psi^* = |A|^2 = A_0^2 = \text{const} . \quad (3.26)$$

Вираз (3.26) означає, що в разі *вільної мікрочастинки*, рух якої описується плоскою монохроматичною хвилею (3.13), імовірність її знаходження в будь-якій точці простору є *однаковою*, бо щільність імовірності не залежить від радіуса-вектора \vec{r} . Так воно і має бути, оскільки плоска монохроматична хвиля є нескінченною як у просторі, так і в часі.

Окрім цього, згідно зі співвідношеннями невизначеностей Гейзенберга для координат та імпульсів вільний рух мікрочастинки зі сталим і чітко визначеним імпульсом означає, що положення мікрочастинки у просторі абсолютно невизначене. Це якраз і відповідає тому факту, що мікрочастинку з однаковою імовірністю ($\rho = \text{const}$) можна виявити в усіх точках простору.

Звісно, що статистичне тлумачення $|\Psi|^2$ зберігається і в разі розв'язків рівняння (3.21) для стаціонарного випадку: квадрат модуля комплексної псі-функції, що задовольняє це рівняння, тлумачиться як щільність імовірності виявити мікрочастинку в

об'ємі dV поблизу точки, радіус-вектор якої \vec{r} вказує положення мікрочастинки в просторі. Для стаціонарних станів щільність імовірності не повинна залежати від часу. Справді

$$\rho(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{-i\omega t}\psi^*(\vec{r})e^{i\omega t} = \psi(\vec{r})\psi^*(\vec{r}). \quad (3.27)$$

Принцип суперпозиції. З'ясовано, що безпосередній фізичний зміст має власне не сама Ψ функція, а квадрат її модуля $|\Psi|^2$. Проте знання псі-функції дає можливість статистично передбачити значення величин, які вимірюються експериментально, тобто тих величин, що мають реальний фізичний зміст. Більше того, у квантовій фізиці оперують саме з Ψ функцією, а не з експериментально спостережуваною величиною $|\Psi|^2$. Така потреба виникає у зв'язку з поясненням хвильових властивостей мікрочастинок — явищ інтерференції та дифракції. Ситуація абсолютно аналогічна до тієї, що спостерігається для хвильової оптики. В оптиці принцип суперпозиції приймається лише для електромагнітних полів, а не для їх інтенсивностей. Це дає змогу пояснити явища інтерференції та дифракції.

Подібним чином у квантовій фізиці приймається як один з головних постулатів квантової механіки *принцип суперпозиції псі-функцій*: якщо квантова система може перебувати у станах, що описуються хвильовими функціями Ψ_1 і Ψ_2 (вважаємо, що функції нормовані), то вона може перебувати і в стані, який описується хвильовою функцією

$$\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2, \quad (3.28)$$

де c_1 і c_2 — довільні (у загальному випадку комплексні) числа.

Знайшовши у такий спосіб Ψ , маємо змогу визначити щільність імовірності $\rho = |\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ перебування системи у новому стані.

Отже, зі змісту псі-функції випливає, що квантова механіка має статистичний характер. За допомогою цієї функції можна лише передбачити, з якою імовірністю мікрочастинка може бути експериментально виявлена в різних точках простору. Іноді говорять, що квантова механіка менш точно описує положення

мікрочастинки, ніж класична, яка може точно визначити місцезнаходження та швидкість *макрочастинки (матеріальної точки)* у кожний момент часу. Це дійсно так, але слід пам'ятати, що класична механіка просто не працює в мікросвіті.

3.3. Найпростіші випадки руху мікрочастинок

Дослідимо стаціонарні розв'язки найпростіших квантово-механічних задач, пов'язаних з рухом мікрочастинок. Незважаючи на те, що це прості модельні задачі, у цих прикладах проявляються головні квантові закономірності.

3.3.1. Частинка в потенціальній ямі. Квантування енергії

Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів (3.21) дозволяє знайти *пси-функцію*, а отже, визначити ймовірність знаходження частинки в різних точках простору. Окрім того, з цього рівняння та умов, які накладаються на *пси-функцію*, безпосередньо випливають правила квантування енергії. Достатньо лише врахувати, що фізичний зміст мають лише ті розв'язки рівняння (3.21), для яких $\psi(r)$ є *однозначною, неперервною та скінченною в усіх точках*. Якщо потенціальна енергія $U(\vec{r})$ має на поверхні розриви неперервності, то на таких поверхнях *пси-функція та її перша похідна повинні залишатися неперервними*. На ділянці простору, де $U(\vec{r})$ прямує до нескінченності, *хвильова функція $\psi(r)$ повинна дорівнювати нулю*. Саме неперервність $\psi(r)$ функції вимагає, щоб на межі цієї ділянки функція $\psi(r)$ перетворювалася в нуль.

Розв'язки, що задовольняють ці умови, є можливими лише для певних значень енергії E . Їх називають *власними значеннями*, а відповідні функції $\psi(r)$ для цих значень енергій — *власними функціями*. Сукупність власних значень E утворює можливі значення енергій у відповідних стаціонарних станах. Ці значення можуть бути *дискретними або неперервними*, утворюючи відповідно *дискретний або неперервний енергетичний спектр*.

Частинка в нескінченно глибокій прямокутній одновимірній потенціальній ямі. Знайдемо власні значення енергій та відповідні їм власні функції для частинки, що рухається вздовж осі x . Потенціальну енергію залежно від цієї координати зображено на рис. 3.5, *a*.

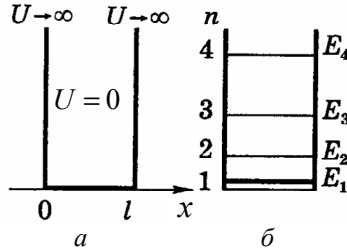


Рис. 3.5

У середині інтервалу $(0, l)$ потенціальна енергія дорівнює нулю, а за межами — нескінченності, отже частинка не може вийти за межі інтервалу $(0, l)$, або, як кажуть, вона перебуває в потенціальній ямі. Імовірність знаходження частинки за межами нескінченно глибокої потенціальної ями дорівнює нулю, тому за межами інтервалу $\psi = 0$. Оскільки хвильова функція має бути неперервною, то вона дорівнюватиме нулю і в точках $x = 0$ і $x = l$:

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (3.29)$$

Рівняння (3.21) для середньої частини ями, де $U = 0$ набуває вигляду

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \quad (3.30)$$

або, увівши позначення

$$k^2 = 2mE / \hbar^2, \quad (3.31)$$

дістаємо

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0. \quad (3.32)$$

Рівняння (3.32) абсолютно ідентичне диференціальному рівнянню для вільних незгасаючих коливань (див. модуль 4

«Коливання і хвилі», підрозд. 1.5, формула 1.29), розв'язком якого є функція $\psi(x) = A \cos(kx + \varphi)$. Для зручності перетворимо її за формулою косинуса суми $\psi(x) = A[\cos kx \cdot \cos \varphi - \sin kx \cdot \sin \varphi]$ та введемо позначення $C_1 = A \cos \varphi$, $C_2 = -A \sin \varphi$, тоді

$$\psi(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (3.33)$$

Гранична умова $\psi(0)$ дає $C_1 = 0$, а з умови $\psi(l) = C_2 \cdot \sin kl = 0$ випливає, що

$$kl = \pi n, \quad (3.34)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$ (можливість $n = 0$ виключається, оскільки для такого випадку $\psi \equiv 0$ і $|\psi|^2 = 0$, що не має фізичного змісту).

Підставивши k з виразу (3.34) у (3.31), дістанемо вираз для енергії

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (3.35)$$

де число n називають *головним квантовим числом*. Енергія виявилася квантованою, а її спектр — дискретним (рис. 3.5, б).

Отже, накладання на псі-функцію граничних умов (3.29), що обмежують рух частинки в просторі, приводить до квантування, тобто утворення дискретного спектра енергій.

Енергія ж вільної частинки, рух якої необмежений у просторі й часі, утворює неперервний спектр власних значень енергій $E = p^2 / 2m = \hbar^2 k^2 / 2m$.

Неважко переконатися безпосереднім підставленням, що хвильова функція вільної частинки $\psi(x) = Ae^{\pm ikx}$ ($U = 0$), де $k = \sqrt{2mE} / \hbar$, є розв'язком рівняння (3.30) за будь-яких значень енергії $E > 0$. Це й означає, що енергетичний спектр вільної частинки суцільний.

Наведемо приклади, які показують, що квантування стає помітним лише тоді, коли величина обмеження має атомарний масштаб.

Для цього за допомогою формули (3.35) розрахуємо відстані між сусідніми енергетичними рівнями для електрона

$m_e = 0,911 \cdot 10^{-27}$ г, що перебуває у потенціальній ямі завширшки $l = 10$ см (вільні електрони в металі):

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e l^2} (2n+1) \approx n \frac{\pi^2 \hbar^2}{m_e l^2} \approx n 12 \cdot 10^{-29} \text{ ерг} \approx \\ \approx n \cdot 7.5 \cdot 10^{-17} \text{ еВ.}$$

Ці енергетичні відстані надто малі, тому енергетичний спектр майже суцільний. Якщо взяти потенціальну яму атомарних розмірів $l = 10^{-8}$ см = 1 Å, то $\Delta E_n \approx n 12 \cdot 10^{-11}$ ерг $\approx n 75$ еВ — дискретність стає чітко помітною.

Із формули (3.35) випливає, що існує мінімальна, але не рівна нулю енергія

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}, \quad (3.36)$$

яка відповідає основному стану руху частинки. Хвильова функція цього стану

$$\psi_1(x) = C \sin(\pi x / l) \text{ (замінили } C_2 \text{ на } C \text{)} \quad (3.37)$$

у жодній точці всередині ями в нуль не перетворюється. Ця властивість хвильової функції основного стану має загальний характер: *хвильова функція основного стану не має вузлів, тобто не дорівнює нулю всередині досліджуваної області, в нуль вона може перетворюватися лише в точках, що містяться на межах області.*

Із виразу (3.36) видно, що мінімальна енергія зі зменшенням лінійних розмірів ями збільшується. Це пов'язано з тим, що зі зменшенням лінійних розмірів ями зменшується довжина хвилі де-Бройля, що відповідає основному стану. А зменшення довжини хвилі де-Бройля означає збільшення імпульсу (енергії) частинки.

Отже, уточнення положення частинки у просторі неминуче супроводжується збільшенням її енергії. Це один з проявів принципу невизначеності.

Власним значенням енергії (3.35) відповідають власні функції

$$\psi_n(x) = C \sin kx = C \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.38)$$

Для визначення коефіцієнта скористаємося умовою нормування

$$\begin{aligned} \int_0^l \Psi \Psi^* dx &= C^2 \int_0^l \sin^2 kx dx = C^2 \int_0^l \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx = \\ &= C^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k} \right) \Big|_0^l = \frac{C^2 l}{2} = 1. \end{aligned}$$

Другий доданок проінтегрованого виразу перетворюється в нуль на обох кінцях ями за умови (3.34). Отже, $C = \sqrt{2/l}$, а власні функції є дійсними величинами:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.39)$$

Графіки власних функцій зображено на рис. 3.6, а, а щільність імовірності $\Psi^* \Psi = \Psi_n^2(x)$ знаходження частинки в різних місцях потенціальної ями — на рис. 3.6, б.

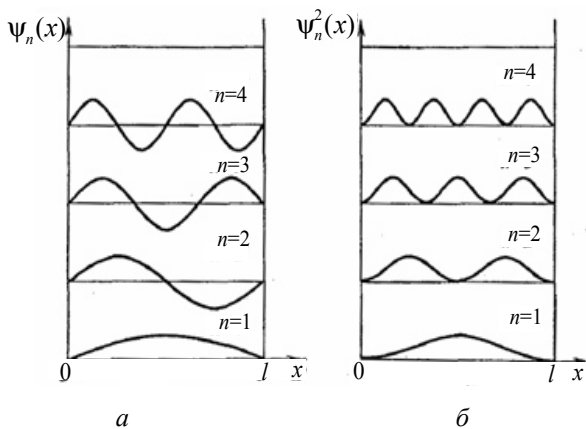


Рис. 3.6

Як видно з цих рисунків, в основному стані ($n=1$) з максимальною ймовірністю частинку можна виявити всередині ями, а ймовірність перебування її поблизу меж ями мінімальна. Разом з тим для стану $n=2$ ймовірність знаходження частинки всередині ями мінімальна, при цьому частинка з однаковою

ймовірністю може перебувати як у лівій, так і в правій її половині. Така поведінка частинки, звісно, несумісна з поняттям траєкторії.

Зі збільшенням квантового числа n (енергії частинки) максимуми розподілу щільності ймовірності розміщуються дедалі ближче один до одного, і в разі великих значень n картина розподілу щільності ймовірності стає майже рівномірною по всій довжині ями. Це означає, що частинку з однаковою ймовірністю можна знайти в будь-якій точці ями, тобто вона поводить себе як класична матеріальна частинка. Цей випадок відповідає принципу відповідності Бора, коли для великих значень n квантовий об'єкт (система) переходить у класичний.

Виходячи з цього принципу, можна ввести інший критерій, у разі виконання якого достатню точність дає класична фізика. Справді, зі збільшенням квантового числа n зростає енергія і відповідно частота, а отже, зменшується довжина хвилі λ де-Бройля. Тоді за незмінної ширини потенціальної ями дедалі краще виконуватиметься умова $\lambda_B \ll l$ — критерій для застосування класичної фізики. Цей критерій аналогічний до критерію, коли хвильова оптика може бути замінена на геометричну у випадку, коли довжина електромагнітної хвилі стає надто малою порівняно з характерними розмірами оптичної системи $\lambda \ll L$ (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 3.5).

3.3.2. Проходження частинки крізь прямокутний потенціальний бар'єр скінченної ширини

Нехай мікрочастинка рухається вздовж осі x і при цьому на своєму шляху вона натрапляє на прямокутний потенціальний бар'єр висотою U_0 і завширшки l

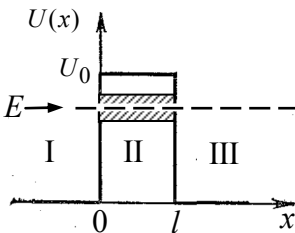


Рис. 3.7

бар'єр висотою U_0 і завширшки l (рис. 3.7). Вважатимемо, що ліворуч і праворуч від бар'єра потенціальна енергія частинки дорівнює нулю $U(I) = U(III) = 0$.

Відповідно до уявлень класичної фізики, якщо енергія частинки більша за висоту бар'єра ($E > U_0$), то вона, пройшовши над бар'єром, подолає

його і потрапить з ділянки I у ділянку III (рис. 3.7). Якщо ж $E < U_0$, то частинка не зможе подолати бар'єр, вона відіб'ється від нього і полетить у зворотному напрямі, залишаючись у ділянці I.

Зовсім інша картина спостерігається для квантових частинок, яким притаманні хвильові властивості. Проходження частинки крізь бар'єр нагадує поведінку електромагнітної хвилі на межі поділу двох середовищ з різними показниками заломлення. Як відомо (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 1.1), електромагнітна хвиля на межі поділу середовищ частково відбивається, а частково проходить у друге середовище. Хвиля де-Бройля на межі потенціального бар'єра поводить себе аналогічно, частково вона відбивається, а частково проходить крізь нього. Це означає, що навіть за умови $E < U_0$ існує відмінна від нуля ймовірність проникнення частинки в заборонену ділянку II. Така несумісна з класичною фізикою поведінка мікрочастинки впливає безпосередньо з рівняння Шредінгера.

Рівняння Шредінгера (3.21) для ділянок I, II і III має вигляд

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + k^2\psi_1 = 0 \quad (k^2 = 2mE/\hbar^2); \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2} - \alpha^2\psi_2 = 0 \quad (\alpha^2 = 2m(U_0 - E)/\hbar^2); \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2\psi_3}{dx^2} + k^2\psi_3 = 0 \quad (k^2 = 2mE/\hbar^2). \quad (3.42)$$

Розв'язки цих рівнянь добре відомі, зокрема, для рівнянь (3.40) і (3.42) ці розв'язки можна записати у вигляді функції (3.33). Але для зручності запишемо їх у найбільш загальному вигляді (див. модуль 4 «Коливання і хвилі», підрозд. 1.5):

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}; \quad (3.43)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}; \quad (3.44)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \quad (3.45)$$

(сталі A і B — комплексні величини).

На ділянці I існують як падаюча, так і відбита хвилі де-Бройля, тому розв'язок $\psi_1(x)$ складається з двох доданків вигляду e^{ikx} і e^{-ikx} , а на ділянці III — лише хвиля, що пройшла крізь бар'єр у додатному напрямі осі x , тому коефіцієнт B_3 у функції $\psi_3(x)$ слід вважати таким, що дорівнює нулю. Для знаходження інших коефіцієнтів скористаємося умовами, які має задовольнити хвильова функція. Зокрема, для того, щоб хвильова функція та її перші похідні були *неперервними* в усьому інтервалі змінної величини x , повинні виконуватися умови: $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, $\psi_2(l) = \psi_3(l)$ та $\psi'_1(0) = \psi'_2(0)$, $\psi'_2(l) = \psi'_3(l)$. Із цих умов знаходимо співвідношення між коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2; \\ A_2 e^{al} + B_2 e^{-al} &= A_3 e^{ikl}; \\ ikA_1 - ikB_1 &= \alpha A_2 - \alpha B_2; \\ \alpha A_2 e^{al} - \alpha B_2 e^{-al} &= ikA_3 e^{ikl}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Поділивши четверте рівняння системи (3.46) на друге, знайдемо співвідношення між модулями коефіцієнтів A_2 і B_2 :

$$\frac{|A_2|}{|B_2|} = \frac{|\alpha + ik| e^{-al}}{|\alpha - ik| e^{al}} = e^{-2al} \quad (3.47)$$

(комплексні числа $\alpha + ik$ та $\alpha - ik$ мають однакові модулі). Для більшості практичних випадків $\alpha l = \frac{l\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar} \gg 1$. За такої умови зі співвідношення (3.47) випливає, що $|B_2| \gg |A_2|$. Тому порівняно з B_2 можна покласти, що $A_2 = 0$ і система рівнянь (3.46) спрощується до вигляду:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= B_2; \\ A_2 e^{al} + B_2 e^{-al} &= A_3 e^{ikl}; \\ ikA_1 - ikB_1 &= -\alpha B_2; \\ \alpha A_2 e^{al} - \alpha B_2 e^{-al} &= ikA_3 e^{ikl} \end{aligned} \quad (3.48)$$

(у другому й четвертому рівняннях коефіцієнти A_2 і B_2 зберігаються, оскільки вони стоять перед великою $e^{\alpha l}$ і малою $e^{-\alpha l}$ величинами відповідно).

Поділивши третє рівняння системи (3.48) на ik , а потім склавши його з першим і врахувавши, що α і k одного порядку величини ($\alpha \approx k$), знайдемо співвідношення між сталими A_1 і B_2 :

$$2A_1 = B_2(1+i). \quad (3.49)$$

Різниця між другим рівнянням і четвертим, попередньо поділивши на α , дозволяє знайти співвідношення між сталими коефіцієнтами B_2 і A_3 з урахуванням, що $\alpha \approx k$:

$$2B_2e^{-\alpha l} = A_3e^{ikl}(1-i). \quad (3.50)$$

Із рівнянь (3.49) і (3.50) знаходимо, що

$$\frac{A_3}{A_1} = 2e^{-\alpha l}e^{-ikl}. \quad (3.51)$$

Помноживши вираз (3.51) на комплексно-спряжену величину, дістанемо відношення квадрата модуля амплітуди хвилі, що пройшла крізь бар'єр, до квадрата модуля амплітуди падаючої хвилі:

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = 4e^{-2\alpha l}. \quad (3.52)$$

Це відношення визначає *ймовірність проходження частинки крізь бар'єр* — *коефіцієнт прозорості*. Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди, то виходить, що коефіцієнт прозорості дорівнює відношенню інтенсивності хвилі де-Бройля, що пройшла крізь бар'єр, до інтенсивності хвилі, яка падає на межу бар'єра.

Тунельний ефект. Проаналізуємо вираз (3.52), записавши його з точністю до несуттєвого коефіцієнта у вигляді

$$D \approx e^{-2\alpha l} = \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right]. \quad (3.53)$$

Ймовірність проходження частинки крізь потенціальний бар'єр значною мірою залежить від ширини бар'єра l , різниці енергій $(U_0 - E)$ та маси частинки m . Чим вужчий потенціальний бар'єр і чим менша різниця $(U_0 - E)$, тим більша ймовірність для частинки пройти крізь бар'єр. Зокрема, для електрона $m_e = 0,911 \cdot 10^{-27}$ г, коли $U_0 - E = 5$ еВ, коефіцієнт прозорості залежно від ширини бар'єра l змінюється таким чином:

$l(\text{Å})$	1	1,3	1,5	1,8	2,0	5,0	10,0
D	0,101	0,051	0,032	0,016	0,010	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-10}$

Бачимо, що для бар'єра завширшки $l = 1 \text{ Å}$ (атомні розміри) коефіцієнт прозорості досягає десяти відсотків, проте для п'яти ($l = 5 \text{ Å}$) і тим паче для десяти ($l = 10 \text{ Å}$) атомних відстаней він стає мізерним. Ось чому для більшості практичних випадків коефіцієнтом перед експонентою нехтують, вважаючи його таким, що дорівнює одиниці.

Формулу (3.53) можна узагальнити на випадок потенціального бар'єра довільної форми. Для цього довільний бар'єр ділять на низку вузьких прямокутних бар'єрів завтовшки dx і виконують інтегрування

$$D \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx \right], \quad U = U(x). \quad (3.54)$$

Під час подолання потенціального бар'єра частинка проходить крізь бар'єр немовби через тунель, тому таке явище називають *тунельним ефектом*. При цьому проходження бар'єра не супроводжується для частинки втратою енергії: вона виходить з меж бар'єра з тією самою енергією, з якою в нього входила. За класичною фізикою таке явище є абсурдним, оскільки в тунелі (заштрихована частина ділянки II, див. рис. 3.7) частинка повинна мати від'ємну кінетичну енергію $W = E - U_0 < 0$. Проте тунельний ефект — специфічне квантове явище, яке не має аналогів у класичній фізиці. Нагадаємо, що в квантовій теорії поділ повної

енергії $E = U + W$ на кінетичну (W) і потенціальну (U) не має змісту. Кінетична енергія залежить від координат, а потенціальна — від імпульсу. Ці дві динамічні змінні внаслідок принципу невизначеності не можуть мати одночасно точних значень. Отже, у цьому випадку висновок про від'ємність кінетичної енергії усередині тунелю стає безпідставним.

За допомогою тунельного ефекту вдалося пояснити низку нових фізичних явищ, а саме: виникнення контактної різниці потенціалів, холодну емісію електронів з металів, α -розпад, спонтанний поділ атомних ядер, ядерні реакції тощо.

3.3.3. Квантовий гармонічний осцилятор

Гармонічним осцилятором у класичній фізиці називають частинку, що здійснює одновимірний рух під дією квазіпружної сили $F = -kx$.

Потенціальна енергія такої частинки

$$U = kx^2 / 2, \quad (3.55)$$

де k — коефіцієнт пружності; x — відхилення від положення рівноваги.

Графіком функції $U(x)$ є парабола (рис. 3.8). Згідно з класичною механікою осцилятор здійснює гармонічні коливання з циклічною частотою $\omega = \sqrt{k/m}$, де m — маса частинки (див. модуль 4 «Колівання і хвилі», підрозд. 1.5).

У квантовій механіці поняття сили втрачає зміст. Тому *квантовий гармонічний осцилятор* (цю модель використовують для пояснення коливальних спектрів молекул, а також інших фізичних явищ) визначають як частинку з потенціальною енергією вигляду (3.55), або з урахування виразу для частоти

$$U = m\omega^2 x^2 / 2. \quad (3.56)$$

Рівняння Шредінгера (3.21) для одновимірної задачі має вигляд

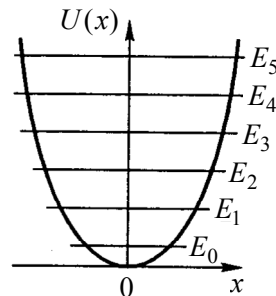


Рис. 3.8

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \Psi = 0. \quad (3.57)$$

У теорії диференціальних рівнянь доведено, що рівняння (3.57) має скінченні, однозначні й неперервні розв'язки (власні функції), коли власні значення повної енергії дорівнюють

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.58)$$

На відміну від енергетичних рівнів у прямокутній ямі (див. вираз (3.35)) енергія квантового осцилятора пропорційна не другому, а першому степеню n , тому енергетичні рівні квантового осцилятора розміщуються на однакових відстанях один від одного, тобто вони — еквідистантні (рис. 3.8).

Мінімальну енергію $E_0 = \hbar\omega / 2$ ($n = 0$), що не дорівнює нулю, називають *нульовою енергією*.

Існування такої енергії пояснюється так. Квантова частинка не може перебувати в нижній точці параболічної потенціальної ями, так само як вона не може «лежати» на дні нескінченно глибокої прямокутної потенціальної ями (див. формулу (3.36) і рис. 3.5). Це пов'язано з принципом невизначеності. Якби енергія дорівнювала нулю, то частинка перебувала б у стані спокою, для якого $\Delta x = 0$ і $\Delta p_x = 0$, що суперечить принципу невизначеності.

Якісно мінімальну енергію квантового осцилятора можна отримати, виходячи з принципу невизначеності. Останній призводить до того, що на відміну від класичного осцилятора повна енергія та амплітуда коливань квантового гармонічного осцилятора не можуть дорівнювати нулю.

Дійсно, якщо частинка обмежена областю $\Delta x \approx A$ — амплітудою коливань, то $p \approx \hbar / A$, отже, імпульс частинки не може дорівнювати нулю. При цьому повна енергія E задовольняє співвідношення:

$$E \geq K = p^2 / (2m) \geq \hbar^2 / (2mA^2),$$

де $K = p^2 / (2m)$ — кінетична, а $E = U = kA^2 / 2$ — повна енергії.

Підставивши амплітуду $A = \sqrt{2E/k}$ в останнє співвідношення та врахувавши вираз $\omega = \sqrt{k/m}$, дістанемо

$$E^2 \geq \hbar^2 \omega^2 / 4 \Rightarrow E \geq \hbar \omega / 2,$$

звідки випливає $E_{\min} = E_0 = \hbar \omega / 2$.

Існування нульової енергії підтверджено експериментально. Виявляється, що інтенсивність розсіяного кристалами світла в разі зниження температури не прямує до нуля, а прямує до певного кінцевого значення. Це вказує на те, що за температури абсолютного нуля коливання атомів у кристалічній ґратці не припиняються.

Класичний осцилятор випромінює світло лише з *однією* частотою ω . Здавалося б, що *квантовий осцилятор* згідно з правилом частот Н. Бора ($E_n - E_m = \hbar \omega_{nm}$, див. формулу (2.18)) мав би випромінювати будь-які кратні частоти, але це не так.

Квантова механіка дозволяє розрахувати ймовірність переходу осцилятора з одного рівня на інший з відповідним випромінюванням або поглинанням фотона. З'ясувалося, що ця ймовірність не дорівнює нулю лише тоді, коли виконується *правило добору*

$$\Delta n = \pm 1. \quad (3.59)$$

За такої умови правило частот Бора дає

$$\omega_{nm} = E_n - E_m / \hbar = \Delta n \hbar \omega / \hbar = \pm \omega \quad (3.60)$$

класичну частоту.

Отже, на відміну від класичного осцилятора мінімальна енергія *квантового осцилятора* не дорівнює нулю, вона квантується, а можливими переходами є лише ті, для яких виконується правило добору, згідно з яким квантове число n може змінюватись тільки на одиницю.



Запитання та завдання для самоконтролю

1. У чому полягає гіпотеза Луї де-Бройля?
2. Покажіть, що групова швидкість хвиль де-Бройля дорівнює швидкості мікрочастинки, а її фазова швидкість завжди більша від швидкості світла.

3. Які властивості мікрочастинок підтвердили досліди К. Девісона і Л. Джермера та Дж. Томсона і П. Тартаковського?

4. На прикладі дифракції електронів на щілині покажіть неможливість одночасного точного визначення координати та імпульсу мікрочастинки.

5. Сформулюйте та поясніть зміст принципу невизначеності Гейзенберга для координат й імпульсів та енергії і часу. Наявність яких властивостей мікрочастинок зумовлює існування принципової межі точності визначення цих величин?

6. Як можна пояснити розмивання енергетичних рівнів воднеподібних систем (крім основного стану)?

7. Чи можливий стан, у якому мікрочастинка перебуває у стані спокою?

8. Покажіть, що співвідношення Гейзенберга не відіграють ніякої ролі для макроскопічних тіл.

9. Отримайте рівняння Шредінгера для вільної частинки, рух якої описується плоскою монохроматичною хвилею.

10. Отримайте рівняння Шредінгера для частинки в потенціальному силовому полі.

11. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.

12. Розкрийте фізичний зміст хвильової функції та назвіть стандартні математичні умови, які вона має задовольняти.

13. Використовуючи формулу для енергії частинки в прямокутній потенціальній ямі, покажіть, за яких умов дискретність, пов'язана з квантуванням стає помітною, а за яких енергетичний спектр є суцільним.

14. Як змінюється щільність імовірності перебування частинки в потенціальній ямі залежно від зміни головного квантового числа n ? Який розподіл імовірності матимемо для великих n ?

15. Що називають тунельним ефектом? Чи порушується з погляду класичної фізики закон збереження енергії при подоланні потенціального бар'єра?

16. Що називають квантовим гармонічним осцилятором і як його енергія залежить від квантового числа n ? Запишіть для нього правило добору.



Задачі

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Позитрон (античастинка до електрона) пройшов прискорювальну різницю потенціалів $U = 510$ кВ. Знайти довжину хвилі позитрона, урахувавши релятивістські ефекти.

Розв'язання. Довжина хвилі де-Бройля для частинки залежить від її імпульсу p і визначається формулою

$$\lambda = h / p, \quad (1)$$

де $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — стала Планка.

Зв'язок між імпульсом і кінетичною енергією для релятивістського випадку має вигляд

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}, \quad (2)$$

де E_0 — енергія спокою; E_k — кінетична енергія частинки.

Поєднуючи формули (1) і (2), дістаємо

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}}. \quad (3)$$

Кінетична енергія позитрона, що прискорився різницею потенціалів U , дорівнює

$$E_k = eU, \quad (4)$$

де e — заряд позитрона.

Енергія спокою позитрона визначається рівністю

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (5)$$

Із формул (3), (4) і (5) випливає, що

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2m_0 c^2 + eU)eU}}. \quad (6)$$

Маса спокою позитрона дорівнює масі електрона $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, а його заряд $e = +1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Підставивши ці числові значення у формулу (6), отримаємо

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{(2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,1 \cdot 10^5) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5,1 \cdot 10^5}} =$$

$$= 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Задача 2. Електрон перебуває в нескінченно глибокій прямокутній потенціальній ямі завширшки l . Розрахувати ймовірність того, що електрон, який перебуває у збудженому стані ($n = 2$), буде знайдений у середній третині ями.

Розв'язання. Ймовірність P виявлення частинки в інтервалі $x_1 < x < x_2$ визначається за формулою:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx, \quad (1)$$

де $\psi_n(x)$ — власна хвильова функція, що відповідає n -му стану; $x_1 = l/3$, $x_2 = 2l/3$.

Хвильова функція, що описує стан електрона в нескінченно глибокій потенціальній ямі, має вигляд:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (\text{див. вираз (3.39)}).$$

Підставляючи $\psi_n(x)$ у формулу (1), дістаємо

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{l} \sin^2 \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (2)$$

Для знаходження інтеграла (2) виконаємо заміну $\sin^2 \frac{\pi n}{l} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{l} x \right)$ і винесемо сталі величини за знак інтегрування:

$$P = \frac{1}{l} \left[\int_{x_1}^{x_2} dx - \int_{x_1}^{x_2} \cos \frac{2\pi n}{l} x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{l} \left[(x_2 - x_1) - \frac{l}{2\pi n} \left(\sin \frac{2\pi n x_2}{l} - \sin \frac{2\pi n x_1}{l} \right) \right]. \quad (3)$$

Обчислимо інтеграл (3) для випадку, що відповідає умові задачі:

$$P = \frac{1}{l} \left[\left(\frac{2}{3}l - \frac{1}{3}l \right) - \frac{l}{2\pi 2} \left(\sin \frac{2\pi 2}{l} \frac{2}{3}l - \sin \frac{2\pi 2}{l} \cdot \frac{1}{3}l \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{1}{3}l - \frac{l}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} - \frac{2}{4\pi} \sin \frac{\pi}{3} = 0,195$$

(враховано, що $\sin 8\pi/3 = \sin \pi/3$, а $\sin 4\pi/3 = -\sin \pi/3$).

Задача 3. Використовуючи співвідношення невизначеності для енергії і часу, обчислити ширину $\Delta\lambda$ спектральної лінії випромінювання атома в разі його переходу зі збудженого стану в основний. Середній час життя атома у збудженому стані становить 10^{-8} с, а випромінювана довжина хвилі $\lambda = 600$ нм. Невизначеність часу Δt вважати такою, що дорівнює часу перебування атома у збудженому стані.

Розв'язання. У разі переходу атома зі збудженого стану в основний існує розкид (невизначеність) в енергії ΔE фотонів, що випромінюються. Згідно зі співвідношенням невизначеності ширина енергетичного рівня ΔE , а відповідно невизначеність в енергії фотона пов'язана з невизначеністю часу співвідношенням

$$\Delta E \Delta t \approx \hbar. \quad (1)$$

Енергію фотона подамо у вигляді

$$E = \hbar\omega = 2\pi\hbar c / \lambda. \quad (2)$$

Розкиду значень енергії ΔE відповідає розкид значень $\Delta\lambda$ довжин хвиль. Диференціюючи рівняння (2), дістаємо

$$dE = \left| \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2} \right| d\lambda, \quad \text{або} \quad (3)$$

$$\Delta E = \left| \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2} \right| \Delta\lambda. \quad (4)$$

Розкид довжин хвиль $\Delta\lambda$, що входить у вираз (4), припускаємо таким, що дорівнює ширині спектральної лінії. Ураховуючи співвідношення (4) і (1), для ширини спектральної лінії дістаємо:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c\Delta t} = \frac{(6 \cdot 10^{-7})^2}{6,28 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8}} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ м.}$$

Аудиторні задачі

1. Знайдіть довжину хвилі де-Бройля для: а) нейтрона, що рухається із середньоквадратичною швидкістю за температури 290 К; б) протона, що рухається в однорідному магнітному полі з індукцією 15 мТл по колу радіусом 1,4 м. (148 пм; 0,197 пм)

2. Вузкий пучок моноенергетичних електронів падає за нормаллю на поверхню монокристала нікелю. У напрямі, що становить кут $\varphi = 55^\circ$ з нормаллю до поверхні, спостерігається максимум відбивання четвертого порядку за енергії електронів $W = 180 \text{ еВ}$.

Розрахувати відповідну величину міжплощинної відстані. (2,05 Å)

3. Частинка масою m рухається в одновимірному потенціальному полі $U = kx^2/2$ (гармонічний осцилятор). Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальну можливу енергію частинки в такому полі. ($\hbar\omega$, точний розрахунок дає $\hbar\omega/2$)

4. Оцінити за допомогою співвідношень невизначеностей похибку швидкості електрона в атомі водню, вважаючи розмір атома $l \approx 1 \text{ Å}$. Порівняти цю швидкість зі швидкістю електрона на першій борівській орбіті. (10^6 м/с , $v_1 = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$)

5. Електрон з кінетичною енергією $W = 4 \text{ еВ}$ локалізований на ділянці розміром $l = 1 \text{ мкм}$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості. (10^{-4})

6. Паралельний пучок електронів, що мають швидкість 10^6 м/с , проходить крізь щілину завширшки $b = 0,1 \text{ мм}$. Знайти ширину центрального максимуму, який спостерігають на екрані, віддаленому на відстань 1 м. (14,6 мкм)

7. Електрон перебуває в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі завширшки l . Розрахувати найменшу різницю енергій між двома сусідніми рівнями для двох випадків: $l = 10 \text{ см}$;

$l = 10 \text{ Å}$. ($1,1 \cdot 10^{-16} \text{ еВ}$; $1,1 \text{ еВ}$)

Навчальний елемент 4

КВАНТУВАННЯ АТОМІВ

4.1. Квантування воднеподібного атома. Квантування енергії

У воднеподібних атомах (водень і його ізотопи, воднеподібні іони, позитроній і мюоній) електрон рухається в кулонівському центральному полі позитивно зарядженого ядра $+Ze$. Сила, що втримує електрон на відстані порядку атомного розміру ($\sim 10^{-8}$ см = 1Å), є кулонівською силою притягання, якій відповідає потенціальна енергія: $U(r) = -Ze^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$. Для такого силового поля рівняння Шредінгера (3.21) набуває вигляду

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (4.1)$$

Оскільки поле $U(r)$ – центральне, то це рівняння розв'язують у сферичній системі координат (r, ϑ, φ) із врахуванням стандартних умов, що накладаються на хвильову функцію $\psi(r)$. Оператор Лапласа у сферичних координатах записують так:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.2)$$

Розв'яжемо рівняння (4.1) для найпростішого випадку — повної сферичної симетрії. За цієї умови функція ψ буде залежати тільки від r і не буде залежати від кутів ϑ і φ . Тому похідні в операторі Лапласа за ϑ і φ дорівнюватимуть нулю, а рівняння Шредінгера матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2m_e}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0 \quad (4.3)$$

або, увівши позначення $2m_e E / \hbar^2 = \alpha$; $Ze^2 m_e / (4\pi\epsilon_0 \hbar^2) = \beta$, остаточно дістаємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \left(\alpha + \frac{2\beta}{r} \right) \psi = 0. \quad (4.4)$$

Найпростішим розв'язком, що має скінченне значення при $r=0$ і прямує до нуля в разі $r \rightarrow \infty$, є функція $\psi = e^{-kr}$. Тоді

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -ke^{-kr}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = k^2 e^{-kr}. \quad \text{Підставляючи ці вирази в рівняння (4.4)}$$

та скорочуючи на e^{-kr} , дістаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - \frac{2}{r}k + \left(\alpha + \frac{2\beta}{r} \right) = 0 \Rightarrow (k^2 + \alpha) + (-2k + 2\beta)\frac{1}{r} = 0. \quad (4.5)$$

Рівняння (4.5) повинно виконуватись за будь-яких значень r , тому обидва доданки в дужках мають дорівнювати нулю кожний окремо, звідки $k^2 = -\alpha$; $k = \beta$, або $\beta^2 = -\alpha$. Беручи до уваги, що $\alpha = 2m_e E / \hbar^2$, $\beta = Ze^2 m_e / (4\pi\epsilon_0 \hbar^2)$, остаточно дістаємо:

$$E_1 = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}. \quad (4.6)$$

Порівнюючи формулу (4.6) з формулою Бора $E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$

[див. (2.26)], бачимо, що отриманий вираз є енергією електрона на першій $n=1$ стаціонарній орбіті, тобто енергією основного стану воднеподібного атома.

Якщо $Z=1$, то $E_1 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$ — енергія основного стану

атома водню, а з протилежним знаком — мінімальна енергія іонізації основного стану $E_{\text{іон}} = -E_1$.

Підставляючи в останню формулу значення констант, можна переконатися, що $E_{\text{іон}} = -E_1 = 13,6 \text{ eV}$ — уже відома величина (див. розд. 2.4), яка добре узгоджується з експериментальним значенням.

Розрахуємо ймовірність перебування електрона в елементі

об'єму $dV = 4\pi r^2 dr$ — сферичний прошарок завтовшки dr . Згідно з виразом (3.27), імовірність перебування електрона на відстані r від ядра для $n = 1$, тобто для функції $\psi_1(r) = e^{-kr}$ дорівнює:

$$dP = |\psi_1(r)|^2 dV = |\psi_1(r)|^2 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 e^{-2kr} dr. \quad (4.7)$$

Очевидно, що стала k повинна мати розмірність см^{-1} . Уведемо нову сталу a_1 , пов'язану з k співвідношенням $k = 1/a_1$. Тоді

$$dP = 4\pi r^2 e^{-2r/a_1} dr, \text{ де}$$

$$dP/dr = \rho = 4\pi r^2 e^{-2r/a_1} \quad (4.8)$$

— щільність імовірності виявити електрон у сферичному прошарку одиничної товщини.

Із формули (4.8) видно, що ймовірність перетворюється в нуль при $r = 0$ та асимптотично прямує до нуля, якщо $r \rightarrow \infty$. Отже, існує певна ймовірність знайти електрон на будь-якій відстані від ядра — від 0 до ∞ . Розрахуємо відстань, на якій ця ймовірність максимальна. Для цього дорівняємо до нуля похідну за r від ρ :

$$4\pi \left[2re^{-2/a_1} + r^2 \left(-\frac{2}{a_1} \right) e^{-2/a_1} \right] = 0.$$

Після скорочення на e^{-2r/a_1} отримаємо $2r - 2r^2/a_1 = 0$, звідки $r_{\max} = a_1$. Ураховуючи, що $a_1 = 1/k = 1/\beta$ і що для атома водню

$$(Z = 1) \beta = e^2 m_e / (4\pi\epsilon_0 \hbar^2), \text{ дістаємо } a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0,529 \text{ \AA} \text{ — радіус}$$

першої борівської орбіти атома водню.

Таким чином, висновки теорії Бора для атома водню підтверджуються квантовою механікою. Хоча теорія Бора досить правильно описує будову атома водню, проте вона виявилася безсилою перед іншими атомами. Пояснити й описати будову атомів спромоглася лише квантова механіка, яка базується на рівнянні Шредінгера. У загальному випадку розв'язок рівняння Шредінгера (4.1) навіть для атома водню є складною процедурою (про це свідчить повний вигляд оператора Лапласа), тому зупинимось на аналізі кінцевих результатів.

Установлено, що рівняння (4.1) має розв'язки, які відповідають стандартним умовам для функції $\psi(r)$ у двох випадках:

- 1) для будь-яких додатних значень енергії $E > 0$;
- 2) для дискретних від'ємних значень енергій

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2} < 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.9)$$

Випадок $E > 0$ відповідає електрону, що пролітає поблизу ядра і прямує в нескінченність. Такий електрон характеризується неперервним енергетичним спектром. Для випадку $E < 0$ маємо дискретний спектр енергії і саме він найбільш цікавий, оскільки відповідає зв'язаному стану електрона, тобто електрону, що входить до складу атома.

Отримані під час розв'язку рівняння Шредінгера (4.1) від'ємні значення енергії (4.9) збігаються з виразом (2.26). Проте у квантовій механіці ці значення впливають як наслідки основних положень цієї теорії, а Н. Бору довелося штучно вводити додаткові припущення — постулати. Незважаючи на збіг результатів теорії Бора і квантової механіки щодо атома водню, слід звернути увагу на істотну різницю між ними стосовно інтерпретації стану електрона в атомі. У теорії Бора — це рух електрона по стаціонарних дискретних орбітах (див. підрозд. 2.1.4.); у квантовій механіці поняття орбіти взагалі не існує, її місце займає псі-функція.

Квантові числа n, l, m . У процесі розв'язання рівняння (4.1) з'ясувалося, що власні функції ψ залежать від трьох квантових чисел n, l, m : $\psi = \psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi)$, де n — головне квантове число, воно збігається з номером енергетичного рівня (див. формулу (4.9)). Число l — орбітальне (азимутальне), а m — магнітні квантові числа. Квантові числа n, l, m можуть набувати таких значень:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots; \\ l &= 0, 1, 2, 3, \dots, n-1; \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l \end{aligned} \quad (4.10)$$

(квантове число m часто позначають через m_l , указуючи, що воно зумовлене *орбітальним рухом* електрона).

Енергія електрона у воднеподібному атомі відповідно до виразу (4.9) залежить тільки від головного квантового числа n . Отже, кожному власному значенню E_n (крім випадку $n=1$) відповідає кілька власних функцій Ψ_{nlm} , що відрізняються квантовими числами l і m . Це означає, що електрон в атомі може мати одне й те саме значення енергії, перебуваючи в кількох різних станах. Наприклад, енергія E_2 ($n=2$; $l=0, 1$; $m=0, \pm 1$) є однаковою для чотирьох станів: Ψ_{200} , Ψ_{210} , Ψ_{21+1} , Ψ_{21-1} . Стани з однаковими значеннями енергії називають *виродженими*, а їх кількість — *кратністю виродження* енергетичного рівня. Із урахуванням можливих значень квантових чисел l і m [див. вирази (4.10)] загальна кількість різних станів для n -го рівня воднеподібної системи дорівнює

$$N = \sum_{l=0}^{l=n-1} (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2. \quad (4.11)$$

Це число слід ще подвоїти внаслідок наявності спіну електрона (див. підрозд. 4.4).

4.2. Квантування моменту імпульсу та магнітного моменту електрона

У квантовій механіці доведено, що орбітальне квантове число l визначає модуль орбітального моменту імпульсу електрона в атомі

$$M = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.12)$$

а орбітальне магнітне квантове число m — проекцію цього моменту на заданий напрям Z в одиницях \hbar

$$M_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm l \quad (4.13)$$

(орбіт у квантовій механіці не існує, проте момент, зумовлений рухом електрона в атомі, називають орбітальним або механічним).

Звернемо увагу, що для $l \gg 1$ формула (4.12) переходить у формулу Бора для квантування орбіт $M = \hbar\sqrt{l(l+1)} \approx \hbar\sqrt{l^2} = \hbar l$ [див. вираз (2.19)].

Просторове квантування. Оскільки вісь Z вибирають довільним чином (зазвичай це напрям зовнішнього магнітного поля, яке у просторі можна зорієнтувати як завгодно), то рівність (4.13) означає, що проекція моменту імпульсу на довільну вісь квантується; вона дорівнює цілому числу сталих Планка. Схематично для випадку $l=2$ це зображено на рис. 4.1. На осі Z відкладені можливі значення $m\hbar$, які є проекціями вектора \vec{M} довжиною $\hbar\sqrt{l(l+1)}$ (для $l=2$ довжина $M = \hbar\sqrt{6}$). Дискретність в орієнтації моменту імпульсу (а також магнітного моменту) називають просторовим квантуванням.

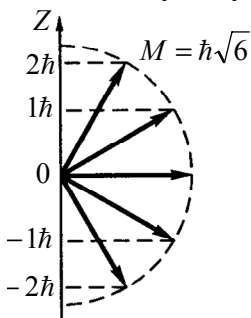


Рис. 4.1

Зауважимо, що схема на рис. 4.1 є умовною, оскільки «вектор» \vec{M} принципово не має певних напрямів у просторі. Це зумовлено тим, що в квантовій механіці орбітальний момент імпульсу істотно відрізняється від класичного. Виявляється, що одночасно можуть мати певні значення лише квадрат моменту M^2 (або, що те саме, модуль цієї величини) і одна з його проекцій на координатні вісі. Дві інші проекції при цьому абсолютно невизначені (винятком є випадок $M=0$ — усі три проекції на осі X , Y , Z мають значення, що дорівнює нулю), тому «вектор» \vec{M} не має певного напрямку в просторі. Для наочності таку ситуацію зображають за допомогою «вектора» \vec{M} , який прецесує в просторі за твірною конуса, вісь якого збігається з вибраним напрямом. Тоді певне значення має лише проекція M_z , а дві інші проекції M_x і M_y — невизначені (рис. 4.2).

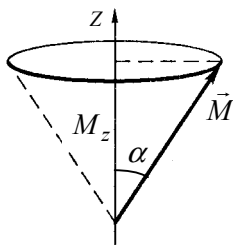


Рис. 4.2

Надалі саме такий квантовий зміст вкладатимемо в поняття «вектор» орбітального моменту імпульсу.

Проекція вектора не може бути більшою від його модуля $|m\hbar| \leq \hbar\sqrt{l(l+1)}$, звідки випливає, що максимальне ціле значення

$|m|$ дорівнює l . Крім цього, очевидно, що $\cos \alpha = M_z / M = m / \sqrt{l(l+1)} < 1$, отже кут α не може дорівнювати 0 або π , а «вектор» \vec{M} бути чітко орієнтованим уздовж напрямку Z .

Квантове число m може набувати значень $\pm l$ і 0, отже загальна кількість можливих значень m становить $2l+1$. Якщо $l=0$, то згідно з квантовими уявленнями [див. формулу (4.12)] орбітальний момент імпульсу *дорівнює нулю*. За класичною інтерпретацією це відповідає руху електрона *вздовж радіуса орбіти* ($\vec{M} = m_e [\vec{r}\vec{v}] = 0 \Rightarrow$ вектор \vec{r} колінеарний вектору \vec{v}), тобто електрон під час свого руху повинен перетинати частину простору, де міститься ядро. Такий рух за класичною фізикою неможливий. У цьому проявляється найбільша відмінність квантового орбітального моменту імпульсу від класичного.

Із погляду класичної фізики стійкий стан електрона з нульовим моментом імпульсу неможливий ще тому, що без обертання електрон мав би впасти на ядро. Крім цього, навіть якщо він і обертається навколо ядра (планетарна модель атома), то такий атом реально існувати не може, оскільки його час життя не перевищує 10^{-11} с (див. розд. 2.1).

У квантовій механіці стани з нульовим моментом імпульсу можуть існувати. Припустімо, що атом водню перебуває в основному стані. Енергія такого стану мінімальна, тому для оцінювання енергії електрона в кулонівському полі ядра можна покласти $\Delta r \approx r$ і $\Delta p \approx p$ (див. підрозд. 3.1.3). Згідно з принципом невизначеності $p \approx \hbar / r$, тоді енергію атома водню можна подати у вигляді

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \approx \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Розмір атома є результатом компромісу двох доданків енергії, які мають протилежні знаки. Якщо електрон «падатиме» на ядро (r зменшується), то кінетична енергія зростатиме швидше ($\sim 1/r^2$), ніж потенціальна ($\sim 1/r$), і навпаки. Отже, існує певне оптимальне значення r , для якого повна енергія набуває мінімального значення. За такої енергії електрону падати на ядро або віддалятися від нього

енергетично не вигідно, тому атоми в нормальному (основному) стані є стабільними.

Орбітальний магнітний момент електрона. Усе висловлене стосовно співвідношень між M і M_z можна поширити і на магнітний момент μ та його проекцію μ_z на вісь Z . Справді, наявність механічного орбітального моменту імпульсу електрона зумовлює існування його орбітального магнітного моменту. З погляду класичної фізики це пояснюється так (див. модуль 3 «Електрика і магнетизм», підрозд. 4.4). Електрон, обертаючись навколо ядра по плоскій коловій орбіті радіусом \vec{r} зі швидкістю \vec{v} , за величиною має момент імпульсу

$$|\vec{M}| = |m_e [\vec{v} \vec{r}]| = m_e v r.$$

Електрон — заряджена частинка, тому під час його руху по орбіті створюється коловий струм $I = ev$. Цей струм, охоплюючи площу орбіти $S = \pi r^2$, створює орбітальний магнітний момент, напрямлений перпендикулярно до площини орбіти (за правилом правого гвинта). За означенням він дорівнює $\mu = IS = ev\pi r^2$ (у системі СІ), або, урахувавши, що $v = 2\pi r \nu$, дістаємо

$$\mu = ev / 2.$$

Відношення цього моменту до орбітального механічного дорівнює гіромагнітному відношенню $\mu / M = -e / 2m_e$, звідки

$$\mu = -\frac{e}{2m_e} M. \quad (4.14)$$

Знак мінус вказує, що напрями магнітного й механічного моментів напрямлені протилежно, оскільки заряд електрона негативний.

Урахувавши формули (4.12), (4.13) і (4.14), можна записати вирази, що дає квантова механіка для магнітного моменту та його проєкцій на вісь Z :

$$\mu = -\frac{e}{2m_e} M = -\frac{e}{2m_e} \hbar \sqrt{l(l+1)} = -\mu_B \sqrt{l(l+1)}; \quad (4.15)$$

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e} M_z = -\frac{e}{2m_e} m\hbar = -\mu_B m, \quad (4.16)$$

де $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}$ — *магнетон*

Бора.

Із формули (4.16) стає зрозумілим, чому квантове число m називають саме *магнітним*.

Отже, аналіз розв'язку рівняння Шредінгера для воднеподібних систем показує, що квантуванню підлягають енергія електрона в атомі, орбітальний і магнітний моменти та їх відповідні проекції на вісь Z .

Символи станів електрона. Правило добору. Стани електрона в атомі позначають малими латинськими літерами залежно від орбітального квантового числа l :

l	0	1	2	3	4	5
Стан електрона	s	p	d	f	g	h

Електрон, для якого $l = 0$, називають s -електроном, а його стан — s -станом; для $l = 1$ — p -електрон і p -стан; для $l = 2$ — d -електрон і d -стан; для $l = 3$ — f -електрон і f -стан і т.д. Значення головного квантового числа вказують перед символом l . Оскільки l завжди менше n ($l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$), то можливими є такі стани електрона: $1s; 2s, 2p; 3s, 3p, 3d; 4s, 4p, 4d, 4f$ і т.д.

У s -стані ($l = 0$) момент імпульсу M і магнітний момент μ орбітального руху електрона в атомі дорівнюють нулю [див. формули (4.12) і (4.15)]. Цей стан є сферично симетричним і саме для такого стану — повної сферичної симетрії — було розв'язано рівняння Шредінгера і знайдено ймовірність знаходження електрона в атомі (див. підрозд. 4.1). У цьому стані електрон з однаковою ймовірністю може перебувати у будь-якій точці, віддаленій на відстань r від ядра, тобто у сферичному прошарку одиничної товщини, але максимум імовірності припадає на перший борівський радіус, який для водню ($Z = 1$) становить $a_1 = 0,529 \text{ А}$.

Випромінювання або поглинання світла відбувається в разі переходу електрона з одного рівня на інший. У квантовій механіці

доведено, що квантове число l змінюється на ± 1 , тобто

$$\Delta l = \pm 1. \quad (4.17)$$

При цьому головне квантове число n , на відміну від гармонічного квантового осцилятора, може змінюватися на довільне ціле число, тобто правило добору для головного квантового числа має вигляд

$$\Delta n \text{ — довільне ціле число.} \quad (4.18)$$

Користуючись умовними позначеннями станів електрона, переходи, що приводять до виникнення серії Лаймана (*спектри випромінювання*, див. рис. 2.7), можна записати у вигляді: $np \rightarrow 1s$ ($n = 2, 3, \dots$), серії Бальмера відповідають переходи: $np \rightarrow 2s$, $ns \rightarrow 2p$ і $nd \rightarrow 2p$ ($n = 3, 4, \dots$) і т.д.

Стан $1s$ — основний стан *атома водню*. У цьому стані атом характеризується мінімальною енергією. Щоб перевести атом з основного стану у збуджений (у стан з більшою енергією), йому необхідно надати енергію. Це може бути здійснено за рахунок теплового зіткнення атомів (з цієї причини нагріті тіла світяться, оскільки атоми випромінюють, повертаючись зі збудженого стану в основний), або за рахунок зіткнення атома зі швидкими електронами, або, нарешті, за рахунок поглинання фотонів.

Фотон у разі поглинання його атомом зникає, передаючи атому всю свою енергію. Атом не може поглинути лише частину фотона, оскільки фотон, як і електрон, є нероздільною частинкою. Якщо не відбуваються багатифотонні процеси, атом здатен поглинути лише ті фотони, енергія яких збігається з різницею енергій двох його енергетичних рівнів. Поглинальний атом зазвичай перебуває в основному стані, тому *спектр поглинання* атома водню складатиметься з ліній, що відповідають переходам $1s \rightarrow np$ ($n = 2, 3, \dots$). Порівняння цих переходів із серією Лаймана $np \rightarrow 1s$ (*спектри випромінювання*) свідчить, що ці переходи характеризуються однаковими частотами (довжинами хвиль).

У загальному випадку для видимого й ультрафіолетового світла спектральні лінії електронних переходів спостерігаються як у *спектрах випромінювання*, так і в *спектрах поглинання*. Спектральні лінії рентгенівського світла спостерігаються лише в *спектрах випромінювання* (див. підрозд. 4.10).

4.3. Спектральні особливості лужних металів

У спектрах випромінювання атомів *лужних металів* (Li, Na, K, Rb, Cs) існують серії, які зовнішньо нагадують серії атома водню. Це не випадково. Лужні метали в таблиці Менделєєва розміщені одразу за інертними (благородними) газами, наприклад, літій (Li) за гелієм (He); натрій (Na) за неоном (Ne) і т.д., тобто вони мають на один електрон більше, ніж інертні гази. Відомо, що інертні гази характеризуються високою стійкістю, щоб їх іонізувати потрібні значні енергії, і навпаки. Лужні метали одновалентні, їх порівняно легко іонізувати. Наприклад, енергія іонізації основного стану для гелію становить 24,45 еВ, а для літію — 5,37 еВ. Якщо атом лужного металу має Z електронів, то можна вважати, що його $Z-1$ електронів утворюють стабільну структуру благородного атома, а останній електрон взаємодіє з цими електронами і ядром порівняно слабо. Отже, перші $Z-1$ електронів і ядро утворюють остов із зарядом $+e$ (заряд ядра $+Ze$ плюс сумарний заряд внутрішніх електронів $-(Z-1)e$), в ефективному полі якого рухається один валентний (його ще називають оптичним) електрон, який зумовлює хімічну валентність атома. Нагадаємо, що в атомі водню навколо ядра (протона) із зарядом $+e$ обертається один електрон із зарядом $-e$. Виходить, що лужні атоми подібні до атома водню, але не зовсім.

На відміну від воднеподібних атомарних систем остов лужних металів не можна вважати точковим зарядом, тому його поле вже не буде чітко кулонівським ($U(r) \sim 1/r$), проте воно зберігає сферичну симетрію. У першому наближенні поле атомного остова можна розглядати як суперпозицію поля точкового заряду $+e$ ($U(r) = -e^2 / (4\pi\epsilon_0 r)$) і поля точкового диполя (середня потенціальна енергія $U(r) \sim -ep / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, де $p = el$ — момент диполя), розміщених у центрі остова. При цьому вісь диполя весь час напрямлена до зовнішнього (валентного) електрона. Тому рух останнього відбувається в полі остова, яке є сферично симетричним. За такого наближення потенціальну енергію зовнішнього електрона у полі остова можна записати як суму енергій:

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - C \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{C}{r^2} \right), \quad (4.19)$$

де C — деяка стала, що має розмірність довжини.

Результат розв'язання рівняння Шредінгера для електрона з потенціальною енергією (4.19) такий самий, як і для атома водню, з тією відмінністю, що енергетичні рівні залежать не лише від квантового числа n , а й від квантового числа l :

$$E_{n,l} = -\frac{m_e e^4}{32\pi\epsilon_0^2 \hbar^2 (n + \sigma_l)^2}, \quad (4.20)$$

де σ_l — поправка Рідберга, що визначається квантовим числом l .

Оскільки стала Рідберга $R = \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^3}$, то енергію (4.20)

можна подати у вигляді

$$E_{n,l} = -\frac{R\hbar}{(n + \sigma_l)^2}, \quad (4.21)$$

а відповідний терм

$$T_{n,l} = -\frac{E_{n,l}}{\hbar} = \frac{R}{(n + \sigma_l)^2}, \quad (4.22)$$

Залежність енергії електрона від орбітального квантового числа l є принциповою відмінністю енергетичних рівнів атомів лужних металів від енергетичних рівнів атома водню.

Оскільки σ_l залежить від l , то терми s , p , d , ... ($l = 0, 1, 2, \dots$) для одного й того самого n уже не будуть однаковими за величиною. Це означає, що знімається виродження по l .

На рис. 4.2 зіставлені між собою терми літію і водню, де жирні точки вказують положення енергетичних рівнів (термів). Видно, що для водню рівні $2s$ і $2p$; $3s$, $3p$ і $3d$; $4s$, $4p$ і $4d$ між собою збігаються, тоді як для літію вони різні. Схему енергетичних рівнів атома літію та найбільш характерні переходи зображено на рис. 4.4. Зазначимо, що у літію основним станом є $2s$, оскільки стан $1s$ уже зайнятий двома електронами, що входять до складу остова.

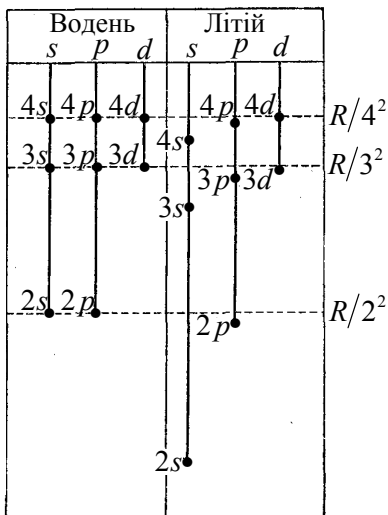


Рис. 4.3

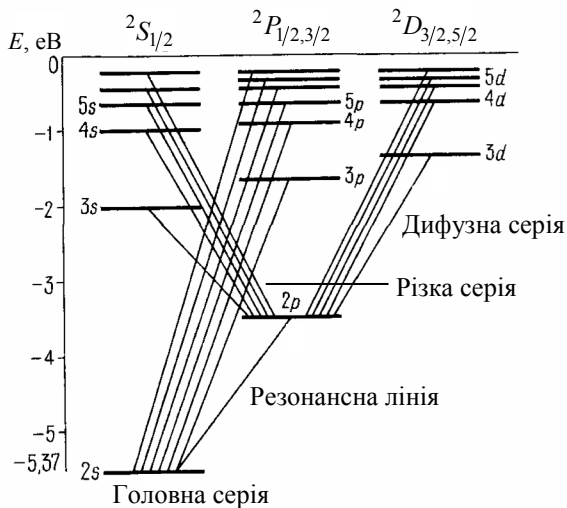


Рис. 4.4

Використані на схемі рис. 4.4 позначення S, P, D — перші літери англomовних назв серій: *sharp* — різкий, *principal* — головний, *diffuse* — розмитий (зміст індексів біля S, P, D пояснено у підрозд. 4.5). Кожна із серій виникає за рахунок переходів з рівнів, що належать до відповідного ряду. Зі врахуванням правила добору (4.17) легко зрозуміти, що в спектрах атомів літію спостерігатимуться такі серії: головна $\omega = 2s - np$, ($n = 2, 3, 4, \dots$); різка $\omega = 2p - ns$, ($n = 3, 4, 5, \dots$); дифузна $\omega = 2p - nd$, ($n = 3, 4, 5, \dots$). Спектральна лінія $\omega = 2s - 2p$, тобто частота випромінювання в результаті переходу валентного електрона зі стану $2p$ у стан $2s$ є найінтенсивнішою, її називають *резонансною*.

Дослідження спектрів іонів лужних металів показали, що момент імпульсу атомного остова (тобто ядра і $Z-1$ електронів) дорівнює нулю. Це означає, що орбітальний момент лужного металу, як і в атомі водню, визначається його зовнішнім валентним електроном.

Використаний запис спектральних серій є символічним. У явному вигляді їх записують як різницю двох відповідних термів, наприклад, для *головної серії літію*:

$$\omega = \frac{R}{(2 + \sigma_s)^2} - \frac{R}{(n + \sigma_p)^2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (4.23)$$

Поправки Рідберга в межах кожної серії майже сталі, але змінюються в разі переходу до іншої серії. Для різних лужних металів вони також різні.

4.4. Тонка структура спектральних ліній. Спін електрона

У результаті дослідження спектрів лужних металів за допомогою спектральних приладів високої роздільної здатності виявилось, що випромінювані лінії є подвійними — дублетами, тобто утворюють *тонку структуру* (для атомів водню також виявлено розщеплення спектральних ліній, але воно значно менше). Вочевидь, що тонка структура спектральних ліній (їх

розщеплення) є наслідком розщеплення збуджених енергетичних рівнів, але це ніяк не впливає з розв'язку рівняння Шредінгера. Для опису дублетної структури спектрів стало недостатньо трьох квантових чисел n , l , m . Виникла потреба у введенні четвертого квантового числа.

Розщеплення спектральних ліній — перший експериментальний факт, що привів до перегляду основ квантової механіки і який змусив С. Гаудсмита та Дж. Уленбека у 1925 р. висунути гіпотезу про наявність у електрона *власного механічного моменту імпульсу*, непов'язаного з орбітальним рухом електрона в атомі. Власний момент імпульсу електрона назвали *спіном*, а відповідний йому магнітний момент — *спіновим магнітним моментом*.

Спочатку вважалося, що спін зумовлений обертанням електрона навколо власної осі (від англ. *to spin* — обертатися), тобто електрон уявляли у вигляді дзиги. Проте таке модельне уявлення, як пізніше з'ясувалося, не узгоджується з низкою експериментальних фактів і від нього відмовилися, але назва збереглася. Спін слід вважати внутрішньою властивістю електрона, подібною до його маси і заряду, але для нього не існує класичного аналога.

Поль Дірак (1928) показав, що спін електрона та його властивості (а також спін позитрона — античастинка електрона, яка має ту саму масу, що й електрон і однаковий за величиною, але протилежний за знаком заряд) автоматично впливають з розвинутої ним квантової теорії електрона, основаної на релятивістському хвильовому рівнянні. Таким чином, з'ясувалося, що спін електрона є одночасно властивістю *квантовою та релятивістською*. Ось чому з розв'язку рівняння Шредінгера, яке є *нерелятивістським рівнянням* квантової механіки, не могло впливати розщеплення збуджених енергетичних рівнів.

Величина спінового (власного) моменту імпульсу електрона визначається загальними законами квантової механіки, а саме: одночасно в одному й тому самому стані певне значення може мати лише квадрат спіну M_s^2 або, що те саме, його модуль

$$M_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{3}/2, \quad s = 1/2 \quad (4.24)$$

та одна з його проекцій M_{sz} на довільну вибрану вісь Z

$$M_{sz} = m_s \hbar = \pm \hbar / 2, \quad m_s = \pm s = \pm 1 / 2, \quad (4.25)$$

де s — спінове квантове число.

Значення $s=1/2$ можна пояснити так. Як і для орбітального моменту кількість можливих значень проекцій m_s , що відповідають певному значенню s , дорівнює $2s+1$. Експериментально встановлено, що це число для електрона дорівнює двом (спектральні лінії дублетні); отже, $2s+1=2$, звідки $s=1/2$. Підкреслимо, що спін мають більшість мікрочастинок, зокрема у протона й нейтрона $s=1/2$, а у фотона $s_\phi=1$. Саме спін фотона зумовлює правило добору $\Delta l = \pm 1$ [див. вираз (4.17)]. Справді, у разі випромінювання фотон виносить з атома свій власний момент, а в разі поглинання — привносить. Отже, правило (4.17) є наслідком закону збереження моменту імпульсу.

Оскільки спін електрона $s=1/2$, а його проекції $1/2$ і $-1/2$, то стає зрозумілим, що з урахуванням розщеплення спектральних ліній кратність виродження n -го енергетичного рівня атома водню має дорівнювати не n^2 [див. вираз (4.11)], а $2n^2$.

Досліди Штерна і Герлаха. У підрозділі 4.2 розглянуто просторове квантування, зумовлене наявністю у електрона в атомі орбітального моменту імпульсу та магнітного моменту. Наявність цих моментів було доведено експериментально О. Штерном і В. Герлахом (1921). У своїх дослідах вони пропускали пучок атомів крізь дуже неоднорідне поперечне магнітне поле, напрямлене вздовж осі Z (рис. 4.5, *a*). Необхідний ступінь неоднорідності поля досягався за допомогою спеціальної форми полюсних наконечників електромагніта (рис. 4.5, *б*). Після проходження магнітного поля пучок атомів потрапляв на фотопластину P і залишав на ній відбиток.

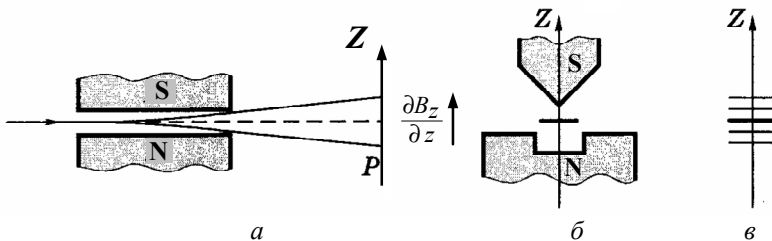


Рис. 4.5

Якщо атоми мають магнітний момент $\vec{\mu}$, то в неоднорідному магнітному полі на них діє сила, проекція якої на вісь Z дорівнює

$$F_z = \vec{\mu} \frac{\partial \vec{B}_z}{\partial z} = \mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \cos \alpha = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (4.26)$$

де α — кут між векторами $\vec{\mu}$ і \vec{B}_z , а $\mu_z = \mu \cos \alpha$ — проекція магнітного моменту атома на вісь Z , тобто на напрям магнітного поля [див. модуль 3 «Електрика і магнетизм», підрозд. 3.8, формула (3.61)].

За відсутності магнітного поля атомарний пучок на фотопластинці залишав відбиток з координатою $z = 0$. Із ввімкненням магнітного поля на атоми починає діяти сила F_z . Припускалося, що внаслідок хаотичного розподілу магнітних моментів атомів у пучку ця сила мала б змінити форму первинного пучка так, що на фотопластинці залишився б відбиток у вигляді розмитої вздовж Z смуги, кінці якої відповідають кутам від $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi$. Але досліди показали, що замість суцільної розтягнутої смуги на фотопластинці спостерігається кілька дискретних смуг (рис. 4.5, в). Це свідчило про розщеплення пучка, зумовленого *квантуванням* μ_z . Очікувалося, що кількість смуг найімовірніше має бути непарною, оскільки квантове число m може набувати $2l + 1$ значень [див. формулу (4.13)]. Проте для багатьох атомів вона виявилася парною, але найбільшою несподіванкою стало розщеплення пучка на дві компоненти у випадку атомів *водню, срібла, міді, лужних металів*. Усі ці атоми належать до першої групи таблиці Менделєєва і мають один валентний електрон в s -стані ($l = 0$), тому згідно з виразами (4.12) і (4.13) розщеплення пучка взагалі не повинно бути. Саме цей експериментальний факт змусив С. Гаудсмита й Дж. Уленбека приписати електрону наявність спіну.

Спіновий магнітний момент. Знаючи ступінь неоднорідності магнітного поля, тобто $\partial B_z / \partial z$, О. Штерн і В. Герлах за величиною розщеплення пучка на фотопластинці розрахували значення проекції спінового магнітного моменту на напрям магнітного поля, тобто μ_{sz} . З'ясувалося, що воно дорівнює одному магнетону Бора $\mu_{sz} = \mu_B = e\hbar / 2m_e$,

Ураховуючи вираз (4.25), дістаємо, що *спінове гіромагнітне відношення* $\mu_{sz}/M_{sz} = e/m_e$ вдвічі перевищує *орбітальне гіромагнітне відношення* $\mu/M = e/2m_e$ [див. формулу (4.14)].

Щоб знайти значення спінового магнітного моменту електрона помножимо M_s на спінове гіромагнітне відношення і врахуємо, що ці власні моменти спрямовані в протилежних напрямках:

$$\mu_s = -\frac{e}{m_e} M_s = -\frac{e\hbar}{m_e} \sqrt{s(s+1)} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)} = -\mu_B \sqrt{3}. \quad (4.27)$$

Очевидно, що проєкцію цього моменту на вісь Z можна записати у вигляді

$$\mu_{sz} = -\frac{e}{m_e} M_{sz} = -\frac{e}{m_e} (\pm\hbar/2) = \pm\mu_B. \quad (4.28)$$

Отже, згідно з виразом (4.25) проєкція спінового механічного моменту імпульсу електрона може набувати значень $+\hbar/2$ і $-\hbar/2$, а спінового магнітного моменту (4.28) — значень $+\mu_B$ і $-\mu_B$.

4.5. Повний механічний і магнітний моменти електрона

Із механічними моментами імпульсу електрона (орбітальним і спіновим) пов'язані магнітні моменти. Останні взаємодіють один з одним подібно до взаємодії двох струмів або двох магнітних стрілок і це приводить до складання моментів. Отже, *повний момент імпульсу* електрона утворюється двома моментами — орбітальним M_l і спіновим M_s , а *повний магнітний момент* — моментами μ_l і μ_s (індекс « l » указує на те, що моменти пов'язані з орбітальним рухом електрона, а індекс « s » — зі спіном). Моменти складають за допомогою векторної моделі атома, у якій орбітальний момент і спін складаються як векторні величини, але з урахуванням просторового квантування (див. рис. 4.1 і 4.2).

Повний механічний момент символічно записують у вигляді суми «векторів»

$$\vec{M}_j = \vec{M}_l + \vec{M}_s, \quad (4.29)$$

де j — квантове число повного моменту електрона.

Правила складання моментів не залежать від того, чи це моменти орбітальні, чи вони спінові. Тому повний механічний момент визначається за формулою, аналогічною до формули для орбітального та спінового моментів:

$$M_j = \hbar \sqrt{j(j+1)}, \quad j = |l+s| = |l \pm 1/2|. \quad (4.30)$$

Квантове число j завжди додатне і якщо $l \neq 0$, воно набуває двох значень $j = l + 1/2$ і $j = l - 1/2$, а якщо $l = 0$, — одного $j = 1/2$.

Проекція повного моменту на вісь Z квантується за правилом

$$M_{jz} = m_j \hbar, \quad (4.31)$$

де $m_j = j, j-1, j-2, \dots, -j$ (усього $2j+1$ значень).

Повний магнітний момент електрона дорівнює сумі «векторів» орбітального і спінового магнітних моментів

$$\vec{\mu}_{\text{пов}} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s. \quad (4.32)$$

Оскільки спінове гіромагнітне відношення $\mu_s / M_s = e/m_e c$ удвічі перевищує орбітальне гіромагнітне відношення $\mu_l / M_l = e/2m_e c$, то $\vec{\mu}_{\text{пов}}$ не лежить на одній лінії з \vec{M}_j (рис. 4.6).

На цій векторній моделі за одиницю довжини \vec{M}_l , \vec{M}_s і \vec{M}_j узято сталу Планка \hbar , а за одиницю довжини магнітних моментів $\vec{\mu}_l$ і $\vec{\mu}_s$ — магнетон Бора.

За такого вибору одиниць «вектор» $\vec{\mu}_l$ має таку саму довжину, що і «вектор» \vec{M}_l , а «вектор» $\vec{\mu}_s$ виявляється вдвічі довшим за «вектор» \vec{M}_s .

У сферично симетричному полі атома повний механічний момент імпульсу зберігається. Це означає, що «вектор» \vec{M}_j зберігає свій напрям у просторі, а «вектори» \vec{M}_l і \vec{M}_s обертаються (прецесують) навколо цього напрямку. Разом з \vec{M}_l і \vec{M}_s обертаються (прецесують) «вектори» $\vec{\mu}_s$, $\vec{\mu}_l$ і $\vec{\mu}_{\text{пов}}$.

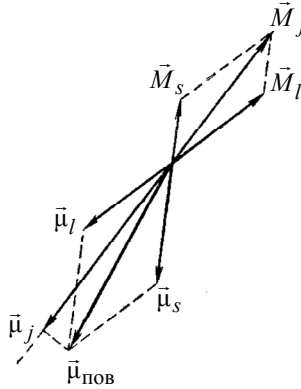


Рис. 4.6

За такої прецесії у $\vec{\mu}_{\text{пов}}$ буде зберігатися лише проекція $\vec{\mu}_j$ на напрям «вектора» \vec{M}_j (середнє значення перпендикулярної складової $\vec{\mu}_{\text{пов}}$ на \vec{M}_j через швидке обертання дорівнює нулю). Оскільки «вектори» $\vec{\mu}_j$ і \vec{M}_j антипаралельні, то можна записати, що ефективний повний магнітний момент

$$\mu_j = -g \frac{e}{2m_e} M_j = -g \frac{e}{2m_e} \hbar \sqrt{j(j+1)} = -g \mu_B \sqrt{j(j+1)}, \quad (4.33)$$

а його проекція на вісь Z

$$\mu_{jz} = -g \mu_B m_j, \quad (4.34)$$

де коефіцієнт пропорційності g називають *фактором Ланде*.

Квантово-механічні розрахунки показують, що фактор Ланде визначається квантовими числами s , l і j :

$$g = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \quad (4.35)$$

Із виразу (4.35) видно, що для $l=0$ ($j=s$) фактор Ланде дорівнює $g_s = 2$. Підставивши це значення у формули (4.33) і

(4.34) та врахувавши, що $j = s = 1/2$, отримаємо формули (4.27) і (4.28). Отже, для атомів з одним валентним електроном у s -стані (срібло, лужні метали, водень) повний момент імпульсу є суто спіновим.

Якщо повний (сумарний) спіновий момент атома (див. підрозд. 4.1.6.) дорівнює нулю, то слід вважати, що $s = 0$. Тоді $j = l$, $g_l = 1$ і формули (4.33) і (4.34) перетворюються на (4.15) і (4.16), тобто повний момент імпульсу атома є суто орбітальним (магній, ртуть).

Для більшості випадків (але не для всіх) фактор Ланде міститься між цими двома значеннями $1 \leq g \leq 2$ і залежить від співвідношення між орбітальним і спіновим моментами та конкретного стану атома.

Пояснення тонкої структури. Розглянемо на прикладі атома літію, як існування спіну електрона пояснює дублетність спектральних ліній. Унаслідок того, що момент атомного остова дорівнює нулю, момент атома літію дорівнює моменту його валентного електрона. Нехай для такого електрона $l \neq 0$. З орбітальним моментом пов'язаний магнітний момент, а отже, і деяке магнітне поле \vec{B}_l . Проекція спіну електрона на напрям цього поля може набувати двох значень, тобто для електрона з $l \neq 0$ можливі два стани з $j_1 = l + 1/2$ і $j_1 = l - 1/2$. Енергія цих двох станів різна, тому для $l \neq 0$ енергетичні рівні подвійні. Причиною такого розщеплення рівнів є *спін-орбітальна взаємодія*. Оскільки енергія спін-орбітальної взаємодії залежить від величини магнітного поля, створюваного орбітальним рухом електрона, тобто залежить від l , то стани з однаковим головним числом n , але з різними значеннями l і j , мають різну енергію. Розщеплення рівнів з певним n за рахунок магнітної взаємодії спінового та орбітального рухів електрона і називають тонкою структурою. Таке розщеплення мале порівняно з відстанями між енергетичними рівнями з різними n , проте воно чітко проявляється в оптичних спектрах, зокрема лужних металів.

Кожний рівень (терм) ряду P ($l=1$) розщеплюється на два підрівні з $j=1/2$ і $3/2$, кожний рівень ряду D ($l=2$) — на підрівні з $j=3/2$, $5/2$ і т.д. Виняток становлять рівні ряду S

($l=0$), яким відповідає лише одне значення $j=1/2$, тому рівні цього ряду не розщеплюються, тобто залишаються *синглетними*.

Для позначення рівнів з однаковим l , але різною енергією використовують класифікацію, що враховує значення квантового числа j .

Так, наприклад, $2p_{1/2}$ означає, що електрон перебуває у стані з $n=2$, $l=1$ і $j=1-1/2=1/2$; у стані $2p_{3/2}$ електрон за таких самих значень n і l має $j=1+1/2=3/2$.

Для позначення термів в атомі користуються символікою

$$^{2s+1}L_j, \quad (4.36)$$

де L — символ стану, який залежить від квантового числа l .

Стан лужних металів визначається його валентним електроном, тому мультиплетність стану цих атомів завжди дорівнює $2 \cdot 1/2 + 1 = 2$, тобто терми дублетні.

Перші ряди термів лужних металів мають такий запис: $^2S_{1/2}$ ($n=1$, $l=0$); $^2P_{1/2,3/2}$ ($n=2$, $l=1$); $^2D_{3/2,5/2}$ ($n=3$, $l=2$) (див. позначення термів на рис. 4.4, на якому розщеплення (рівнів) термів не зображено). Хоча ряд S не розщеплюється, угорі ліворуч також пишуть 2, щоб вказати, що цей ряд належить до системи, в цілому дублетних термів.

Для квантового числа j існує правило добору, відповідно до якого можливими є лише ті переходи, для яких

$$\Delta j = 0, \pm 1, \quad (4.37)$$

при цьому не забуваємо про правило добору для l : $\Delta l = \pm 1$ (див. формулу (4.17)).

Головна серія (див. рис. 4.4) виникає в результаті переходів з двох підрівнів p -термів на один і той самий $2s$ -рівень (рис. 4.7, *а*). Розщеплення p -термів є різним, тому в дублетних лініях спостерігається різна величина розщеплення.

Різка серія (див. рис. 4.4) — переходи із s -рівнів на $2p$ -рівень (рис. 4.7, *б*). Оскільки розщепленню підлягає лише $2p$ -рівень, то всі дублетні лінії мають однакову величину розщеплення.

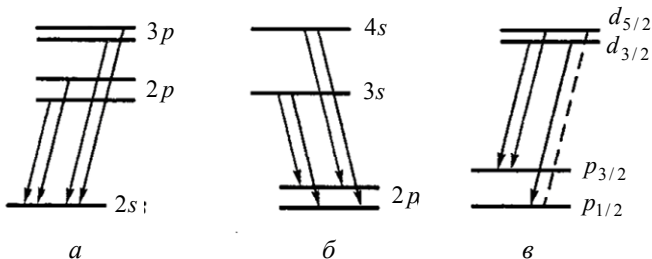


Рис. 4.7

Дифузна серія (див. рис. 4.4) зумовлена переходами з розщеплених d -рівнів на розщеплений $2p$ -рівень (рис. 4.7, в) — спектральні лінії *триплетні*, оскільки переходи, у яких квантове число j змінюється на 2 ($d_{5/2} - 2p_{1/2}$), заборонені правилом добору (4.37).

Розщеплення d -рівнів значно менше за розщеплення $2p$ -рівня. Тому компоненти триплету не завжди розрізняються, а самі лінії стають розмитими (звідси і назва серії).

4.6. Механічний момент багатоелектронного атома

Властивості атома залежать від того, як утворюється повний момент атома. Досвід показує, що в легких і середніх атомах орбітальні моменти електронів взаємодіють між собою сильніше, ніж зі спіновими моментами. Аналогічно поведуться і спінові моменти. Унаслідок цього всі орбітальні моменти складаються в повний орбітальний момент атома \vec{M}_L , усі спінові моменти — в повний спіновий момент \vec{M}_S :

$$\vec{M}_L = \sum_i (\vec{M}_L)_i \quad \text{і} \quad \vec{M}_S = \sum_i (\vec{M}_S)_i, \tag{4.38}$$

а повний момент атома дорівнює сумі цих моментів:

$$\vec{M}_J = \vec{M}_L + \vec{M}_S. \tag{4.39}$$

Такий тип зв'язку є найпоширенішим, його називають *нормальним* або зв'язком *Рассела–Саундерса*, або ще *LS-зв'язком*.

Величина повного орбітального моменту визначається за формулою, аналогічною до (4.12), тобто

$$M_L = \hbar\sqrt{L(L+1)}, \quad (4.40)$$

де L — квантове число орбітального результуючого моменту.

У випадку двох електронів з квантовими числами l_1 і l_2 квантове число L набуває таких значень:

$$L = (l_1 + l_2), (l_1 + l_2 - 1), \dots, |l_1 - l_2|. \quad (4.41)$$

Звідси випливає, що L може мати $2l_1 + 1$ або $2l_2 + 1$ різних значень. Із цих двох варіантів слід вибрати варіант з меншим L . Для більшої кількості електронів число L знаходять шляхом послідовного застосування правила (4.41).

Проекція повного орбітального моменту на вісь Z визначається аналогічно до виразу (4.13):

$$M_{Lz} = m_L \hbar, \quad m_L = L, L - 1, \dots, -L \quad (4.42)$$

(усього $2L + 1$ значень).

Подібним чином визначають величину і проекцію повного спінового моменту:

$$M_S = \hbar\sqrt{S(S+1)}; \quad (4.43)$$

$$M_{Sz} = m_S \hbar, \quad m_S = S, S - 1, \dots, -S \quad (4.44)$$

та повного моменту атома

$$M_J = \hbar\sqrt{J(J+1)}; \quad (4.45)$$

$$M_{Jz} = m_J \hbar, \quad m_J = J, J - 1, \dots, -J, \quad (4.46)$$

де квантове число повного моменту атома набуває таких значень:

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|. \quad (4.47)$$

Очевидно, що за парної кількості електронів в атомі квантові числа S і J є цілими, а в разі непарної кількості — півцілими. Справді, якщо кількість електронів N — парне, то $S = Ns, Ns - 1, \dots, 0$, де $s = 1/2$, тобто в цьому випадку S — цілі числа, а оскільки L — завжди цілі числа, то і J — цілі. Наприклад,

для $N = 2$ число S може дорівнювати 1, 0. Якщо N — непарне, то S набуває всіх півцілих значень від Ns до $s = 1/2$. Наприклад, для $N = 3$ можливими значеннями S є $3/2$ і $1/2$, а отже, квантові числа J також півцілі.

Для того щоб вказати стани атомів, використовують прийняті в спектроскопії позначення, подібні до позначень для окремих електронів:

L	0	1	2	3	4	5	6
Стан атома	S	P	D	F	G	H	I

Енергія атома залежить від взаємної орієнтації моментів M_L (тобто від квантового числа L), взаємної орієнтації моментів M_S (від квантового числа S) та від взаємної орієнтації M_L і M_S (від квантового числа J). Умовно терм атома записують так:

$${}^{2S+1}L_J, \quad (4.48)$$

де L набуває символів S, P, D, F і т.д. залежно від значення числа L .

Праворуч унизу вказується значення J , а ліворуч угорі — мультиплетність стану $2S+1$. Якщо $S \leq L$, число $2S+1$ дорівнює кількості рівнів, що з'являються внаслідок спин-орбітальної взаємодії, тобто визначає мультиплетність стану. Число $2S+1$ називають мультиплетністю і в тих випадках, коли $S > L$, хоча кількість рівнів тонкої структури дорівнює в цьому випадку $2L+1$, а не $2S+1$.

Зауважимо, що подібна символіка використовувалася у випадку лужних металів [див. формулу (4.36)]. Для цих елементів характерним є те, що S атома збігається із $s = 1/2$ його валентного електрона. Символіка ж (4.48) є більш загальною, вона позначає терми будь-яких атомів. Наприклад, розглянемо основний стан атома карбону — 3P_0 . Запис означає, що цей атом в основному стані має $L=1$, $S=1$ і $J=0$. Мультиплетність стану дорівнює $2S+1=3$, тобто цей стан є одним з трьох близьких за енергією станів з однаковими L і S , але різними J : 3P_0 , 3P_1 і 3P_2 .

За допомогою формули (4.35) можна розрахувати фактор Ланде для атома. Достатньо в цій формулі замінити квантові числа для

електрона l, s, j на квантові числа L, S, J для атома. При цьому можливі деякі екзотичні випадки, зокрема для станів 3P_0 і 1S_0 фактор Ланде $g = 0/0$; ця невизначеність не повинна бентежити, оскільки для $J = 0$ механічний момент атома дорівнює нулю, отже, магнітний момент також дорівнює нулю.

Для терму ${}^4D_{1/2}$ фактор Ланде $g = 0$, тобто механічний момент існує, а магнітний ні — квантовий ефект, що немає аналогів у класичній фізиці.

Нормальний зв'язок — один з крайніх випадків. Другим крайнім випадком є *jj-зв'язок*, який у чистому вигляді майже ніколи не реалізується. У важких атомах завдяки сильній спіно-орбітальній взаємодії в кожній парі моменти $(\vec{M}_l)_i$ і $(\vec{M}_s)_i$ взаємодіють між собою сильніше, ніж з іншими, унаслідок чого утворюються повні моменти $(\vec{M}_j)_i = (\vec{M}_l)_i + (\vec{M}_s)_i$ для кожного електрона, які згодом об'єднуються у повний момент атома:
$$\vec{M}_J = \sum_i (\vec{M}_j)_i .$$

Спектроскопічні позначення можуть застосовуватися лише у випадку нормального зв'язку електронів в атомах. Окрім зазначених двох крайніх випадків, існують ще проміжні типи зв'язку, але їх розгляд не входить до загального курсу фізики.

4.7. Принцип Паулі. Розподіл електронів по енергетичних рівнях (оболонках) в атомі

Електрони в атомах можуть перебувати в різних станах, яким відповідають різні четвірки квантових чисел n, l, m_l, m_s або n, l, j, m_j . Скористаємося першою четвіркою та з'ясуємо, у яких станах можуть перебувати електрони у *нормальному*, тобто *незбудженому атомі*. На перший погляд видається, що всі електрони мають розміщуватися на найнижчих доступних для них енергетичних рівнях. Це означає, що в будь-якому атомі в нормальному стані всі електрони повинні перебувати в стані $1s$

($n=1, l=0$), а основні терми всіх атомів мають бути S -термами ($L=0$). Проте досвід свідчить, що це не так.

Зі збільшенням порядкового номера Z атома відбувається чітке послідовне заповнення електронних рівнів атома. Порядок заповнення підлягає *принципу Паулі* (1925): *два електрони не можуть перебувати в одному й тому самому квантовому стані, або, що те саме, в атомі не може існувати двох електронів, усі квантові числа яких однакові*. Наприклад, якщо два електрони мають однакові квантові числа n, l і m_l , то вони повинні мати протилежні спіни, тобто різні квантові числа m_s : $m_s = +1/2$, $m_s = -1/2$.

Електронні оболонки та підоболонки. Як з'ясовано, головному квантовому числу n відповідають $2n^2$ станів, які відрізняються один від одного значеннями квантових чисел l, m_l, m_s . Сукупність електронів, що мають однакове значення квантового числа n , утворює електронну оболонку. Відповідно до значення n оболонкам приписують позначення, взяті зі спектроскопії рентгенівських променів

Значення n	1	2	3	4	5	6 ...
Оболонка	K	L	M	N	O	P ...

До складу оболонок входять підоболонки, які розрізняються квантовим числом l . Оскільки для K -оболонки ($n=1$) орбітальне квантове число дорівнює нулю $l=0$, то це єдина оболонка, яка не має підоболонки. За певного значення l в атомі існує $2(2l+1)$ станів з різними m_l і m_s (для певного l можливі $(2l+1)$ значень m_l ; для кожного значення m_l можливі стани з двома значеннями $m_s = +1/2$ і $m_s = -1/2$). Підоболонки позначаються як і оболонки, але з індексом унизу L_1, L_2 , або у вигляді $2s, 2p$, де перша цифра відповідає головному квантовому числу n , тобто вказує на відповідну оболонку.

Можливі стани електронів в атомі та їх розподіл в оболонках і підоболонках подано в табл. 4.1, де замість позначення $m_s = \pm 1/2$

для наочності використано відповідно символи \uparrow і \downarrow ; символ $\uparrow\downarrow$ означає, що спіни електронів протилежні (N — кількість електронів у оболонці).

Таблиця 4.1

Оболонка	K	L					M							
Підоболонка		L_1	L_2			M_1	M_2			M_3				
(n, l)	$1s$	$2s$	$2p$			$3s$	$3p$			$3d$				
m_l	0	0	+1	0	-1	0	+1	0	-1	+2	+1	0	-1	-2
m_s	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$
N	2	8					18							

Як видно з табл.4.1, кількість можливих станів у K, L, M, \dots оболонках дорівнює відповідно 2, 8, 18, \dots , тобто $2n^2$, а для повністю заповнених оболонок та підоболонок $m_L = \sum m_l = 0$ і $m_S = \sum m_s = 0$. Це можливо лише у випадку, якщо $L = 0$ і $S = 0$, звідки випливає, що $J = L + S = 0$. Отже, у разі визначення квантових чисел L і S атома в цілому заповнені оболонки (підоболонки) можна не брати до уваги.

4.8. Багаточастинна хвильова функція. Невизначеність тотожних частинок. Бозони і ферміони

Принцип Паулі справедливий не тільки для електронів, що належать одному атому, але і для всіх електронів у Всесвіті. При цьому слід пам'ятати, що стани електронів можуть відрізнятися як за енергією, так і за просторовим розподілом.

Розглянемо математичний зміст принципу Паулі. Візьмемо систему, що складається з двох електронів, які перебувають у деякому силовому полі. Координати першого електрона позначимо індексом 1, а координати другого — індексом 2. Нехай перший

електрон перебуває в квантовому стані I та описується хвильовою функцією $\psi_I(x_1, y_1, z_1)$, а другий електрон — у квантовому стані II із хвильовою функцією $\psi_{II}(x_2, y_2, z_2)$. Оскільки за припущенням у стані I перебуває перший електрон, то $\psi_I(x_1, y_1, z_1)$ є амплітудою ймовірності знайти цей електрон поблизу точки (x_1, y_1, z_1) , при цьому ψ_I є функцією координат першого електрона. Аналогічно функція $\psi_{II}(x_2, y_2, z_2)$ — амплітуда ймовірності знайти другий електрон поблизу точки (x_2, y_2, z_2) — є функцією координат другого електрона.

Розглянемо тепер розподіл *обох* електронів. Він описується функцією, що залежить від координат першого і другого електронів, тобто від шести координат x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 . Знехтуємо для спрощення силами, що діють між електронами. Якщо б електрони не підлягали принципу Паулі, то їх рух без взаємодії був би незалежним. Із теорії ймовірностей відомо, що ймовірність суміщення двох незалежних подій, дорівнює добутку ймовірностей кожної з них. У цьому випадку як такі події слід розглядати знаходження першого електрона поблизу точки 1, а другого — поблизу точки 2. Тому варто було б очікувати, що амплітуда ймовірності, яка одночасно описує поведінку двох електронів, повинна мати вигляд

$$\psi_{1,2} = \psi_I(x_1, y_1, z_1)\psi_{II}(x_2, y_2, z_2). \quad (4.49)$$

Проте такий запис суперечить уявленню квантової механіки. Справді, формула (4.49) показує, що функція ψ_I описує розподіл саме першого електрона, у той час як поведінка другого електрона описується функцією ψ_{II} . Тобто запис у неявному вигляді припускає, що можна встановити, який з електронів є першим, а який — другим.

У класичній фізиці, де існує поняття траєкторії, це зробити можна, а у квантовій механіці — ні. У квантовій механіці положення кожного з електронів описується хвильовими функціями, «розмазаними» по всьому простору (див. підрозд. 3.2.1). Оскільки електрони не мають траєкторій, то неможливо встановити, який електрон є першим, а який — другим.

Отже, вираз (4.49) дозволяє знати про електрони більше, ніж це можна встановити з експерименту. Тому він є хибним.

Існують два способи запису амплітуди ймовірності, які позбавлені вказаного недоліку:

$$\psi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_I(\vec{r}_1) \cdot \psi_{II}(\vec{r}_2) + \psi_{II}(\vec{r}_1) \cdot \psi_I(\vec{r}_2); \quad (4.50)$$

$$\psi_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_I(\vec{r}_1) \cdot \psi_{II}(\vec{r}_2) - \psi_{II}(\vec{r}_1) \cdot \psi_I(\vec{r}_2). \quad (4.51)$$

У формулах (4.50) і (4.51) \vec{r}_1 відповідає координатам x_1, y_1, z_1 , а \vec{r}_2 — x_2, y_2, z_2 . Кожен з цих виразів складається з двох доданків. Перший доданок описує стан, коли в стані I перебуває перший електрон, а в стані II — другий електрон. Другий доданок описує стан, коли в стані I перебуває другий електрон, а в стані II — перший. Оскільки ці стани змішані, то встановити, де перебуває який електрон, неможливо. Розглянемо особливості функцій ψ_1 і ψ_2 . Назвемо перший електрон другим, а другий першим. Звісно, що від такого перейменування нічого не повинно змінитися. Проте, як легко перевірити, за такого перейменування електронів (переміни місць \vec{r}_1 і \vec{r}_2) функція ψ_1 зовсім не зміниться $\psi_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_1(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$, а функція ψ_2 змінить свій знак на протилежний $\psi_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\psi_2(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$. Оскільки ймовірність розподілу частинок визначається *квадратом модуля psi-функції*, то встановити зміну знака функції неможливо ніякими дослідями. Проте характер симетричної функції ψ_1 та антисиметричної функції ψ_2 істотно різний. Розглянемо, наприклад, випадок коли обидва стани ψ_I і ψ_{II} ідентичні. Функція ψ_2 при цьому тотожно дорівнюватиме нулю, а функція ψ_1 залишиться незмінною. Тому частинки, що описуються антисиметричними функціями, не можуть мати однакові стани.

Установлено, що *електрони й усі інші частинки, які мають півцілий спін (протони, нейтрони і т. ін.) описуються антисиметричними хвильовими функціями*. Частинки, які описуються антисиметричними хвильовими функціями, не можуть перебувати в однакових станах. Існування принципу Паулі для електронів є, таким чином, необхідним (але не достатнім) наслідком більш загального твердження про те, що *електрони повинні описуватися антисиметричними хвильовими функціями*.

Установлено також, що всі частинки, які мають цілий спі́н (фотони, пі-мезони тощо), описуються симетричними хвильовими функціями. Такі частинки принципу Паулі не підлягають.

Частинки з півцілим спі́ном, на які поширюється принцип Паулі, називають частинками Фермі–Дірака, або ферміонами. Частинки з цілим спі́ном називають частинками Бозе–Ейнштейна, або бозонами. Поділ мікрооб'єктів на ферміони і бозони справедливий не тільки для елементарних частинок, а і для складних утворень, наприклад для атомних ядер та самих атомів. Правило залишається тим самим: симетричними хвильовими функціями описуються складні частинки з цілим спі́ном, тобто системи, що складаються з бозонів чи парної кількості ферміонів. Якщо кількість ферміонів непарна, то система описується антисиметричною хвильовою функцією і підлягає принципу Паулі.

Належність складної частинки до бозонів або ферміонів визначається її спі́ном. Наприклад, атом водню складається з двох ферміонів (протона і електрона), спі́н кожної з яких дорівнює $1/2$. Спі́н атома водню в нормальному стані, може бути або 0 (спі́ни антипаралельні), або 1 (спі́ни паралельні). В обох випадках атом водню в нормальному стані є бозоном, тому принцип Паулі на нього не поширюється.

4.9. Періодична система елементів Менделєєва

Будови електронних оболонок атома ґрунтуються на двох принципах:

- 1) принципі Паулі: в атомі може бути лише один електрон з певним набором квантових чисел;
- 2) принципі мінімуму енергії: за певної кількості електронів в атомі утворюється стан з мінімальною енергією.

Із формули (4.9) видно, що енергія електрона в кулонівському полі збільшується зі зростанням n . Мінімальну енергію мають електрони на K -оболонці ($n = 1$), потім на L -оболонці ($n = 2$) і т.д. Це означає, що оболонки K , L , M , ... повинні заповнюватися послідовно, починаючи з K . Проте, у якій послідовності заповнюються стани s , p , d , f , ... у межах кожної оболонки,

формула (4.9) не визначає, оскільки енергія не залежить від l . Якщо в атомі знехтувати взаємодією між електронами та відхиленням поля від кулонівського, то має відбуватися «ідеальне» заповнення оболонок за схемою, коли заповнення починається з $l_{\min} = 0$ і закінчується $l_{\max} = n - 1$. Така схема відповідає дійсності аж до атома калію К, що відображено в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Елемент Z	K		L			M			N		Основний терм
	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$			
1 H	1	—	—	—	—	—	—	—	—	$^2S_{1/2}$	
2 He	2	—	—	—	—	—	—	—	—	1S_0	
3 Li	2	1	—	—	—	—	—	—	—	$^2S_{1/2}$	
4 Be	2	2	—	—	—	—	—	—	—	1S_0	
5 B	2	2	1	—	—	—	—	—	—	$^2P_{1/2}$	
6 C	2	2	2	—	—	—	—	—	—	3P_0	
7 N	2	2	3	—	—	—	—	—	—	$^4S_{3/2}$	
8 O	2	2	4	—	—	—	—	—	—	3P_2	
9 F	2	2	5	—	—	—	—	—	—	$^2P_{3/2}$	
10 Ne	2	2	6	—	—	—	—	—	—	1S_0	
11 Na	2	2	6	1	—	—	—	—	—	$^2S_{1/2}$	
12 Mg	2	2	6	2	—	—	—	—	—	1S_0	
13 Al	2	2	6	2	1	—	—	—	—	$^2P_{1/2}$	
14 Si	2	2	6	2	2	—	—	—	—	3P_0	
15 P	2	2	6	2	3	—	—	—	—	$^4S_{3/2}$	
16 S	2	2	6	2	4	—	—	—	—	3P_2	
17 Cl	2	2	6	2	5	—	—	—	—	$^2P_{3/2}$	
18 Ar	2	2	6	2	6	—	—	—	—	1S_0	
19 K	2	2	6	2	6	—	1	—	—	$^2S_{1/2}$	
20 Ca	2	2	6	2	6	—	2	—	—	1S_0	
21 Sc	2	2	6	2	6	1	2	—	—	$^2D_{3/2}$	
22 Ti	2	2	6	2	6	2	2	—	—	3F_2	

Нотатки до табл. 4.2

1. Розподіл електронів за станами називають *електронною конфігурацією*, яка записується, наприклад, так: $1s^2 2s^2 2p^6 3s$. Це означає, що в атомі містяться два $1s$ -електрони, два $2s$ -електрони, шість $2p$ -електронів і один $3s$ -електрон. Це конфігурація атома натрію (Na).

2. Оболонку (підоболонку), повністю заповнену електронами, називають *замкненою*. Усі три квантові числа (L , S , J) у замкнених оболонках (підоболонках) дорівнюють нулю. Тому основними термами таких оболонок є 1S_0 . У табл. 4.2 це атоми He, Be, Ne, Mg та ін.

Електрони в кожній підоболонці називають *еквівалентними*. Для еквівалентних електронів значення квантових чисел n і l однакові. Згідно з принципом Паулі для еквівалентних електронів мають бути різними або квантові числа m_l (m_s однакові), або m_s (m_l однакові).

3. До атома аргону (Ar) включно послідовність заповнення оболонок і підоболонок має «ідеальний» характер. Перше відхилення спостерігається для атома калію (K): зовнішній електрон займає замість $3d$ -стану $4s$ -стан. Подібне — не єдиний випадок в періодичній системі, і пов'язано це з тим, що «неідеальні» конфігурації виявляються більш енергетично вигідними. Тобто в результаті взаємодії між електронами для великих чисел n стани з більшим n і малим l можуть мати меншу енергію, ніж стани з меншим n , але з більшим l (підтверджено як розрахунками, так і деякими експериментальними фактами).

4. Хімічні властивості елементів, їх оптичні та деякі інші фізичні властивості визначаються зовнішніми валентними електронами. Оскільки при заповненні чергової оболонки повторюється порядок заповнення попередньої оболонки, то періодичність властивостей хімічних елементів пов'язана з періодичною повторюваністю електронної конфігурації валентних електронів атомів різних елементів.

5. Визначення основного стану перших чотирьох атомів не викликає труднощів — достатньо принципу Паулі. Але вже для атома бору (B, $Z = 5$) виникає невизначеність: одному p -електрону

відповідають $l=1$ і $s=1/2$, звідки $j=3/2$ або $1/2$, тобто можливими є два терми: $P_{3/2}$ і $P_{1/2}$. Який з них є основним, визначають за допомогою двох правил Ф. Хунда.

Правила Хунда. Це напівемпіричні правила, які стосуються системи *еквівалентних електронів*, тобто електронів, що містяться в одній підоболонці і мають однакові n і l . Цих правил два:

1. Серед термів, що належать певній електронній конфігурації, мінімальну енергію має терм з найбільше можливим значенням S (тобто з максимальною мультиплетністю) і з найбільше можливим за такого S значенням L .

2. Квантове число дорівнює $J = |L - S|$, якщо підоболонка заповнена менше ніж наполовину або наполовину, і дорівнює $J = L + S$, коли заповнено більше половини підоболонки.

Очевидно, що для атома бору, який має один p -електрон (табл. 4.2), максимальні значення квантових чисел m_L і m_S дорівнюють $m_L = +1$ і $m_S = +1/2$, а отже, $L = 1$ і $S = 1/2$. Максимальна кількість електронів у $2p$ -підоболонці — $2(2l+1) = 6$. Отже, вона заповнена менше, ніж наполовину і згідно з другим правилом Хунда $J = |L - S| = 1/2$. Звідси висновок — основним термом атома бору є терм ${}^2P_{1/2}$.

Використовуючи правила Хунда, знайдемо прості формули для підрахунку S і L основного стану атома. Нехай електронна підоболонка заповнена менше або наполовину. Це означає, що кількість еквівалентних електронів $k \leq 2l+1$ ($2(2l+1)$ — це кількість еквівалентних електронів у замкненій підоболонці). Спіни всіх цих електронів розміщуються паралельно, отже, квантове число m_S буде мати максимальне значення, що дорівнює $m_S = \sum m_s = k/2$, звідки максимальне значення S також дорівнює цьому числу $S = k/2$.

Оскільки спіни еквівалентних електронів однакові, то згідно з принципом Паулі всі m_l мають бути різними, тобто, якщо для першого електрона $m_{l1} = l$, то для другого $m_{l2} = l-1$ і т.д. до $m_{lk} = l - k + 1$.

Максимальне m_L буде звичайною сумою арифметичної прогресії з кількістю членів, що дорівнює k :

$$m_L = \sum m_l = l + (l-1) + \dots + (l-k+1) = k(2l-k+1)/2.$$

Ця величина і визначає максимальне значення L . Отже, для основного стану квантові числа такі:

$$S = k/2, \quad L = k(2l-k+1)/2, \quad (4.52)$$

при цьому $J = |L-S| = k|(l-k/2)|$.

Використовуючи формули (4.52), легко переконатися, що, наприклад, для електронної конфігурації np^2 основним термом є 3P_0 (елементи 6C, 14Si у табл. 4.2).

Для конфігурації np^2 порядок мультиплетних термів звичайний — зі збільшенням J енергія термів 3P_0 , 3P_1 і 3P_2 збільшується.

У разі, якщо $k > 2l+1$, то формули (4.52) для S і L залишаються справедливими, тільки замість k слід узяти $k' = 2(2l+1) - k$ — кількість електронів, яких не вистачає до заповнення підоболонки.

Це *принцип доповняльності Паулі*. Залишається врахувати, що для цього випадку підоболонка заповнена більш як наполовину, тому $J = L + S = k'(l-k'/2+1)$.

Як приклад знайдемо основний терм електронної конфігурації np^4 . Очевидно, що p -підоболонка заповнена більш як наполовину, при цьому $k' = 2(2l+1) - k = 6 - 4 = 2$, $l = 1$.

Розрахунки за формулами (4.52) дають $S = 1$, $L = 1$, а $J = 2$. Отже, основним термом конфігурації np^4 є терм 3P_2 (елементи 8O, 16S у табл. 4.2), при цьому така конфігурація дає ті самі терми, що й конфігурація np^2 , але терми стають оберненими — зі збільшенням J енергія термів 3P_0 , 3P_1 і 3P_2 зменшується.

4.10. Характеристичне рентгенівське випромінювання

У підрозд. 1.3 розглянуто особливості суцільного спектра гальмівного рентгенівського випромінювання. Але це не єдиний вид рентгенівського випромінювання. Виявляється, що як тільки напруга на рентгенівській трубці перевищить певне критичне значення, яке залежить від речовини анода, то на фоні суцільного спектра (див. рис. 1.6) виникають рентгенівські спектральні лінії атомів матеріалу анода. Зокрема, для вольфрамового анода в разі збільшення напруги до $U \approx 168$ кВ на фоні суцільного гальмівного спектра з'являється *лінійчастий спектр випромінювання* у вигляді чотирьох вузьких *K*-ліній вольфрамового анода (рис. 4.8).

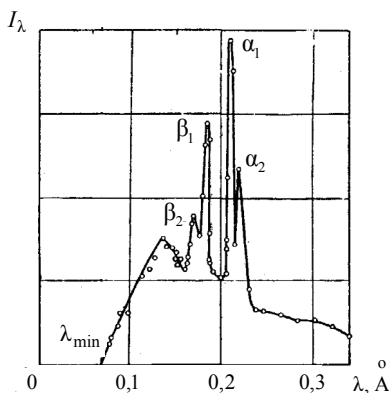


Рис. 4.8

Структура суцільного спектра абсолютно не залежить від матеріалу анода, а лінійчастий рентгенівський спектр навпаки — визначається винятково природою речовини матеріалу анода. Кожному елементу притаманний тільки його лінійчастий спектр, тому лінійчасті рентгенівські спектри також називають *характеристичними*.

Положення довжин хвиль характеристичного спектра на відміну від суцільного не змінюється зі зміною прикладеної напруги. Величина інтенсивності характеристичних ліній збільшується з підвищенням напруги, але зростання поступово уповільнюється, досягаючи певної межі.

Особливості рентгенівських спектрів випромінювання. У рентгенівській трубці електрони, прискорені різницею потенціалів U , бомбардують матеріал анода. Якщо енергія електронів досить велика, то вони можуть вибити електрон з однієї з внутрішніх оболонок атома матеріалу анода. Унаслідок цього атом іонізується, тобто утворюється атом, у якого відсутній один електрон на одній із внутрішніх оболонок.

Перехід електронів з верхньої оболонки на нижню, з якої вибито електрон, супроводжується випромінюванням рентгенівського кванта (рис. 4.9). У разі переходу від одного елемента до наступного будова внутрішніх електронних оболонок більшості атомів змінюється мало, тому рентгенівські спектри випромінювання на відміну від оптичних схожі між собою. Зі зростанням атомного номера Z елемента вони монотонно зміщуються в короткохвильову частину спектра.

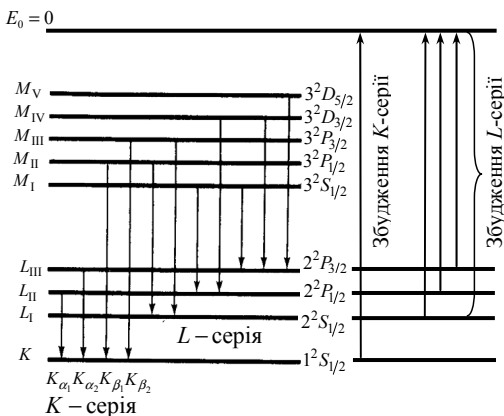


Рис. 4.9

Іонізація атома означає, що кожний рентгенівський терм відповідає стану оболонки, з якої видалено один електрон. Оскільки для замкненої оболонки квантові числа L , S і J дорівнюють нулю, то L , S і J в оболонці з видаленим електроном збігаються з l , s і j видаленого електрона. Тому енергетичний стан оболонки без одного електрона має таку саму мультиплетність, що й енергетичний стан одного електрона. Але терми одного електрона (наприклад, атоми лужних металів) дублетні. Отже, рентгенівські терми також мають бути дублетними (рис. 4.9).

Для кожного з двох електронів K -оболонки, спіни яких протилежні, квантові числа такі: $n=1$, $l=0$, $s=1/2$, $j=1/2$. Якщо один з електронів видалено, то очевидно, що для такої незаповненої оболонки $L=0$, $S=1/2$, $J=1/2$, тобто маємо стан ${}^2S_{1/2}$, який належить до дублетної сім'ї, хоча він і не розщеплюється.

L -оболонка ($n=2$) складається з двох $2s$ -електронів і шести $2p$ -електронів, два з яких мають $j=1/2$, а решта чотири — $j=3/2$. Якщо з оболонки видаляється один з $2s$ -електронів, то виникає стан ${}^2S_{1/2}$, якщо видаляється один з $2p_{1/2}$ -електронів, то виникає стан ${}^2P_{1/2}$ ($L=1$, $S=1/2$, $J=1/2$), а якщо один з $2p_{3/2}$ -електронів, — стан ${}^2P_{3/2}$ ($L=1$, $S=1/2$, $J=3/2$). Маємо дублетну структуру P -терма. Отже, для L -оболонки можливі три різні стани, що відповідають L_I , L_{II} , L_{III} енергетичним рівням (термам).

Абсолютно аналогічно можна дійти висновку, що в разі видалення одного з електронів з M -оболонки ($n=3$) виникає один з п'яти можливих станів: ${}^2S_{1/2}$, ${}^2P_{1/2}$, ${}^2P_{3/2}$, ${}^2D_{3/2}$, ${}^2D_{5/2}$, які відповідають M_I , M_{II} , M_{III} , M_{IV} , M_V енергетичним рівням (термам). При цьому, крім дублетного P -терма з'являється дублетний D -терм. Далі з видаленням одного з електронів N -оболонки ($n=4$) виникають сім різних станів, до складу яких входять дублети P , D і F -термів і т.д.

Оскільки схема рентгенівських рівнів подібна до схеми енергетичних рівнів атома з одним валентним електроном, то за такою аналогією правила добору для рентгенівських спектрів повинні збігатися з правилами добору для лужних металів, а саме: $\Delta L = \pm 1$, $\Delta J = 0, \pm 1$ (див. вирази (4.17) і (4.37)). Тепер стає зрозумілішою схема переходів, показана на рис. 4.9. Стрілками зображено переходи, які підлягають правилам добору. Бачимо, що найбільш короткохвильові лінії K -серії мають дублетний характер, зокрема K_α -лінія складається з двох K_{α_1} і K_{α_2} спін-дублетних ліній, зумовлених наявністю дублетних рівнів, які, у свою чергу,

виникають за рахунок спін-орбітальної взаємодії. Те саме стосується і K_{β_1} , і K_{β_2} дублетних ліній (індекси α , β , γ та інші у спектральних серіях ставлять у порядку зростання частоти).

Із рис. 4.9 видно, що енергія *одного окремого рентгенівського кванта*, наприклад K_{α_1} -лінії, менша за енергію *одного окремого кванта* K_{β_1} -лінії, проте експериментальна інтенсивність цієї лінії приблизно в 5–6 разів менша, ніж інтенсивність K_{α_1} -лінії. Це пояснюється тим, що при видаленні електрона з K -оболонки існує більша ймовірність переходу на звільнене місце електрона з L -оболонки, ніж з M — чи з будь-якої іншої верхньої оболонки. Тому інтегральна (сумарна) інтенсивність K_{α_1} -лінії найбільша.

Значимо, що випромінювання K -ліній обов'язково супроводжується іншими серіями, оскільки в разі випромінювання цих ліній звільняються енергетичні рівні в оболонках L , M , N і т.д., які, у свою чергу, заповнюються електронами з більш верхніх оболонок, тобто виникає *весь рентгенівський спектр атома*.

Спектри поглинання. Спектральні лінії електронних (оптичних) переходів спостерігаються як у *спектрах випромінювання*, так і в *спектрах поглинання*. Для рентгенівського світла спектральні лінії спостерігаються лише в *спектрах випромінювання* (рис. 4.9).

Рентгенівські спектри *поглинання* не схожі на рентгенівські спектри *випромінювання*: вони складаються з кількох *широких смуг поглинання з різким довгохвильовим краєм поглинання* λ_K — для K -смуги, λ_{L_1} , λ_{L_2} і λ_{L_3} — для L -смуги і т.д. (рис. 4.10).

Таку особливість спектрів поглинання можна пояснити так. Нехай довжина хвилі падаючого рентгенівського випромінювання настільки мала (частота велика), що рентгенівські кванти здатні видалити електрон із самої глибокої внутрішньої K -оболонки атома. Тобто відбувається явище фотоефекту, коли рентгенівський квант повністю передає свою енергію (зникає) електрону K -оболонки, і за рахунок отриманої енергії електрон залишає межі атома. Це означає, що відбувається процес фотоіонізації K -оболонки, унаслідок якого інтенсивність рентгенівського випромінювання, що пройшло крізь речовину, зменшується — виникає K -смуга

поглинання. У разі збільшення довжини хвилі (зменшення частоти, а отже, енергії квантів), до значення λ_K , енергія рентгенівського кванта стає вже недостатньою, щоб іонізувати K -оболонку. Саме на цій довжині хвилі спостерігається різке падіння поглинання — з'являється K -край поглинання (рис. 4.10). Якщо надалі збільшувати рентгенівську довжину хвилі, то відбуватиметься іонізація L -оболонки, електрони якої слабкіше зв'язані з ядром атома, ніж електрони K -оболонки, тому їх легше видалити.

Поглинання L -електронами рентгенівських квантів супроводжується появою L -смуги, край поглинання якої складається з трьох «піків», подальше збільшення λ супроводжуватиметься появою M -смуги поглинання з п'ятьма «піками» (рис. 4.10) і т. ін.

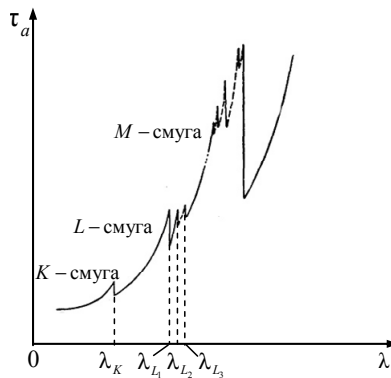


Рис. 4.10

Отже, спектри поглинання однозначно вказують на те, що K -оболонка має один рівень енергії, L -оболонка — три підрівні (L_I , L_{II} , L_{III}), M — п'ять підрівнів (M_I , M_{II} , M_{III} , M_{IV} , M_V). Згодом з'ясувалося, що N -оболонка має сім підрівнів, O — п'ять і P — три підрівні.

Довжини хвиль, що відповідають краям поглинання різних елементів, визначені експериментально і за їх значеннями можна розрахувати енергію зв'язку, або, що те саме, мінімальну енергію іонізації, за якої електрон видаляється з певного енергетичного рівня без надання йому кінетичної енергії. Наприклад, якщо відома

λ_K для певного елемента, то енергію зв'язку (іонізації) K -електрона в цьому елементі можна розрахувати за формулою

$$E_K = \hbar\omega_K = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_K} = \frac{1,24}{\lambda_K \text{ (нм)}} \text{ кеВ}. \quad (4.53)$$

Як видно з експериментальної кривої (рис. 4.10), атомний коефіцієнт поглинання τ_a речовини в разі проходження крізь неї рентгенівського випромінювання змінюється після кожного стрибка приблизно пропорційно λ^3 . Проте точний розрахунок τ_a складний, тому часто користуються емпіричною формулою

$$\tau_a \sim Z^4 \lambda^3 = Z^4 \left(\frac{1}{\omega} \right)^3. \quad (4.54)$$

Із формули (4.54) видно, що проникна здатність рентгенівських променів зменшується зі зростанням їх довжини хвилі. Так, наприклад, інтенсивність *м'якого гальмівного рентгенівського випромінювання*, що виникає в телевізійній (комп'ютерній) електронно-променевої трубці ($U \sim 10\text{кВ}$), ослаблюється приблизно в 1000 разів склом завтовшки всього 1 мм (або шаром алюмінію такої самої товщини). Рентгенівські ж промені, отримані у трубці за прискорювальної напруги $U \sim 50\text{кВ}$, проходять крізь таке скло майже без ослаблення. Для зменшення їх інтенсивності в 1000 разів потрібне скло завтовшки близько 10 см.

Із формули (4.54) видно, що коефіцієнт поглинання істотно збільшується зі зростанням атомного номера Z . Для свинцю $Z = 82$, а для алюмінію $Z = 13$, отже, захисна здатність свинцю в $(82/13)^4 \approx 1600$ разів більша, ніж у алюмінію. Тому для захисту від рентгенівських променів завжди використовують речовини з великим Z , головним чином це свинець.

4.11. Закон Мозлі

Із урахуванням формул (2.26) і (2.30) енергію електрона в кулонівському поля ядра із зарядом Ze можна записати так:

$$E_n = -\frac{R\hbar}{n^2}Z \quad (4.55)$$

($R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ — стала Рідберга). Енергію електрона на одній з підоболонок атома можна подати подібною формулою:

$$E_n = \frac{R\hbar}{n^2}(Z - \sigma_{nl}), \quad (4.56)$$

де σ_{nl} — *стала екранування*, яка враховує екранування поля ядра електронами.

Ця поправка майже не залежить від Z (тому що будова внутрішніх електронних оболонок атомів майже однакова), але залежить від n і l . Для найбільш інтенсивних ліній K -серії стала екранування приблизно дорівнює одиниці $\sigma_K \approx 1$, для L -серії $\sigma_L \approx 7,5$. Значення σ_{nl} знаходять дослідним шляхом і вони наведені в довідниках.

Формули (4.55) і (4.56) мають протилежні знаки, це пояснюється тим, що енергія атома з видаленим електроном стає додатною. Тому схема енергетичних рівнів іонізованого (збудженого) атома є оберненою відносно схеми енергетичних рівнів незбудженого атома.

Отже, рентгенівські терми завжди є оберненими, тобто зі збільшенням J енергія термів зменшується (див. рис. 4.9). Цей висновок підтверджується другим правилом Хунда — якщо електронна оболонка заповнена більш як наполовину, то найменшій енергії відповідає терм з максимальним J . Оскільки характеристичні рентгенівські спектри випромінювання виникають у разі видалення одного електрона з будь-якої внутрішньої замкненої оболонки, то очевидно, що ця оболонка стає незамкненою, але заповненою більш як наполовину.

Видалення електрона із замкненої оболонки атома утворює «дірку» в цій оболонці. Отже, формально можна вважати, що «дірка» перебуває в різних квантових станах і може переходити з одного стану в інший. У разі переходу такої «дірки» на замкнену оболонку остання перестав бути замкненою, а вихідна оболонка відновлюється до замкненої. Із цього погляду обернена схема рентгенівських термів атома аналогічна звичайній схемі

енергетичних рівнів атома з одним валентним електроном, тобто подібна до схеми енергетичних рівнів воднеподібних атомів.

Енергія рентгенівських квантів згідно із законом збереження енергії дорівнює різниці енергій між початковим і кінцевим станами атомів:

$$\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_2} = R\hbar(Z - \sigma_1)^2 \frac{1}{n_1^2} - R\hbar(Z - \sigma_2)^2 \frac{1}{n_2^2}. \quad (4.57)$$

Емпіричні сталі екранування можна ввести не для енергетичних рівнів, а безпосередньо для спектральних ліній. Тоді формула (4.57) спрощується до вигляду

$$\hbar\omega = R\hbar(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (4.58)$$

де σ — нова стала екранування, яка залишається майже незмінною для одних і тих самих ліній у спектрах різних атомів.

Наприклад, $\sigma = 1,13$ для K_α -лінії для всіх атомів із $20 < Z < 30$.

Підставивши у формулу (4.58) значення $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $\sigma = 1,13 \approx 1$, дістанемо просту формулу для частоти K_α -лінії залежно від атомного номера

$$\omega_{K_\alpha} = \frac{3}{4} R(Z - 1)^2, \quad (4.59)$$

з якої видно, що частота рентгенівських ліній в разі переходу від елемента до елемента збільшується майже як Z^2 .

Це означає, що зі зростанням атомного номера Z рентгенівські характеристичні спектри монотонно зміщуються у високочастотну (короткохвильову) ділянку спектра. Ця закономірність була експериментально відкрита Генрихом Мозлі (1913) задовго до появи квантової механіки. Досліджуючи частоти ліній у характеристичних спектрах різних елементів, Генрих Мозлі експериментально встановив, що корінь квадратний із частоти рентгенівського випромінювання лінійно залежить від порядкового номера Z елемента:

$$\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma), \quad (4.60)$$

де C і σ — сталі величини.

Легко бачити, що вираз (4.60) впливає з виразу (4.58), отриманого шляхом теоретичного розрахунку.

Лінійна залежність у законі Мозлі між $\sqrt{\omega}$ і атомним номером Z дала змогу точно розмістити елементи в Періодичній системі елементів Д. І. Менделєєва (ні про заряд ядра, ні про саме існування атомних ядер на той час нічого не було відомо). Зокрема, щоб виправити випадіння точок з прямої залежності $\sqrt{\omega}$ від Z , Г. Мозлі поміняв місцями у таблиці Менделєєва нікель і кобальт (до цього Ni мав менший порядковий номер, ніж Co) та залишив місце для елемента з порядковим номером $Z = 43$ для невідомого на той час елемента — технецію, отриманого пізніше штучним шляхом.



Запитання та завдання для самоконтролю

1. Запишіть рівняння Шредінгера для воднеподібного атома, під час розв'язання якого з'являються квантові числа n , l , m . Яких значень вони можуть набувати?

2. Чому дорівнюють модуль та проекція орбітального моменту імпульсу електрона? Яка принципова відмінність квантового орбітального моменту імпульсу від класичного?

3. Чи може вектор орбітального моменту імпульсу \vec{M} бути чітко орієнтованим уздовж певного виділеного напрямку?

4. Із погляду класичної фізики поясніть, як наявність механічного орбітального моменту імпульсу електрона зумовлює існування його орбітального магнітного моменту.

5. Чому дорівнюють модуль та проекція орбітального магнітного моменту електрона? Яку величину називають магнетонем Бора?

6. Яке квантове число визначає стан електрона? Назвіть символи станів електрона, як їх записують?

7. Запишіть правила добору для воднеподібних атомів.

8. Яка принципова відмінність енергетичних рівнів атомів лужних металів від енергетичних рівнів атома водню?

9. Що показали досліди О. Штерна і В. Герлаха? Що називають спіном електрона?

10. Чому дорівнюють модуль та проекція спінового моменту імпульсу електрона?

11. Які значення мають модуль і проекція спінового магнітного моменту електрона? Порівняйте орбітальне та спінове гіромагнітні відношення.

12. Запишіть вирази для повного магнітного моменту електрона, його проекції на вісь Z , а також вираз для фактора Ланде.

13. Як існування спіну електрона пояснює тонку структуру спектральних ліній? Що називають спін-орбітальною взаємодією?

14. Запишіть правила добору для лужних металів. Якими переходами оптичного електрона зумовлено випромінювання головної, різкої та дифузної серій?

15. За рахунок яких типів зв'язків утворюється повний механічний момент багатоелектронного атома? Яка їх особливість?

16. Як позначають стани атомів у спектроскопії?

17. Сформулюйте принцип Паулі. Як відповідно до нього заповнюються електронні оболонки (підоболонки) в атомі? Чому дорівнюють квантові числа L , S і J для замкнених оболонок (підоболонок)?

18. Які частинки називають бозонами і ферміонами? На які з них поширюється принцип Паулі, а на які ні? Наведіть приклади цих частинок.

19. На яких принципах ґрунтується будова електронних оболонок атомів? Які електрони називають еквівалентними?

20. Що визначають за допомогою правил Хунда? Наведіть формулювання цих правил.

21. Яка природа лінійчастого рентгенівського випромінювання? Чому це випромінювання називають характеристичним?

22. У чому полягає особливість рентгенівських спектрів поглинання? Запишіть та проаналізуйте формулу для атомного коефіцієнта поглинання.

23. Сформулюйте та запишіть закон Г. Мозлі. Яку роль відіграв цей закон у побудові Періодичної таблиці елементів Д. І. Менделєєва?



Задачі

Приклади розв'язування задач

Задача 1. Визначити можливі значення орбітального моменту імпульсу електрона M у збудженому атомі водню, якщо енергія збудження $\varepsilon = 12,09$ еВ.

Розв'язання. Орбітальний момент імпульсу електрона визначається за формулою

$$M = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (1)$$

де орбітальне квантове число набуває таких значень: $l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Для знаходження головного квантового числа скористаємося формулою $E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$, яку подамо у вигляді

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2} \text{ еВ}, \quad (2)$$

де $E_1 = -13,6$ еВ — енергія основного ($n = 1$) стану атома водню.

Енергія збудження ε — це квант енергії, що поглинається атомом під час переходу з основного стану у збуджений, тобто

$$E_1 + \varepsilon = E_n \Rightarrow E_n - E_1 = \varepsilon. \quad (3)$$

Підставивши числові значення величин в електрон-вольтах, дістанемо

$$-13,6/n^2 + 13,6 = 12,09,$$

звідки $n = 3$.

Отже, $l = 0, 1, 2$. Далі за формулою (1) знаходимо можливі значення M : для $l = 0$ $M = 0$; для $l = 1$ $M = \hbar\sqrt{2} = 1,49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; для $l = 2$ $M = \hbar\sqrt{6} = 2,60 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 2. Знайти порядковий номер елемента, для якого в спектрі поглинання рентгенівського випромінювання різниця частот K - та L -країв поглинання становить $\Delta\omega = 6,85 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$.

Розв'язання. За своїм змістом $\hbar \cdot \Delta\omega$ — це різниця енергій зв'язку електрона на K - та L -оболонках, частота переходів між якими (див. рис. 4.9) визначається законом Мозлі:

$$\Delta\omega = \frac{3}{4} R(Z-1)^2, \text{ звідки}$$

$$Z = 1 + \sqrt{4\Delta\omega/3R} = 22 \text{ — хімічний елемент титан.}$$

Задача 3. Визначити довжину хвилі λ та енергію фотона K_{α} -лінії рентгенівського спектра, випромінюваного вольфрамом, у разі бомбардування його швидкими електронами.

Розв'язання. Під час бомбардування важких металів швидкими електронами вони можуть вибити електрони із внутрішніх оболонок (K, L, M, N) атомів. Зокрема, у разі іонізації K -оболонки перехід електронів з верхньої L -оболонки супроводжується випромінюванням рентгенівського фотона, що відповідає K_{α} -лінії, частота якої визначається законом Мозлі:

$$\omega_{K_{\alpha}} = \frac{3}{4} R(Z-1)^2, \quad (1)$$

де $R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ — стала Рідберга; $Z = 74$ — порядковий номер вольфраму.

Помножимо цю частоту на сталу Планка $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$. Тоді енергія кванта

$$\varepsilon = \hbar\omega = 0,75\hbar R(Z-1)^2 =$$

$$= 0,75 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 2,07 \cdot 10^{16} \cdot (73)^2 = 8,7 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} = 54,4 \text{ кеВ.}$$

Із формули (1) з урахуванням співвідношення $\omega = 2\pi c / \lambda$ дістаємо

$$\lambda = \frac{8\pi c}{3R(Z-1)^2} = \frac{8 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 2,07 \cdot 10^{16} \cdot 5329} = 2,28 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0,228 \text{ \AA}.$$

Задача 4. Використовуючи векторну модель атома, розрахувати найменший кут α , який може утворювати вектор \vec{M} орбітального моменту імпульсу електрона в атомі з напрямом зовнішнього магнітного поля. Електрон в атомі перебуває у d -стані.

Розв'язання. Модуль вектора орбітального моменту імпульсу електрона в атомі $M_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, а його проекція на напрям зовнішнього магнітного поля Z становить $M_{l_z} = m\hbar$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm l$. Відношення цих величин є косинусом кута α (див. рис. 4.2):

$$\cos \alpha = M_{l_z} / M_l = m / \sqrt{l(l+1)}. \quad (1)$$

Для d -стану електрона $l = 2$, а $m = 0, \pm 1, \pm 2$. У формулі (1) найменшому значенню кута α відповідатиме найбільше значення квантового числа m . Поклавши $m = 2$, отримаємо:

$$\cos \alpha = 2 / \sqrt{2(2+1)} = 0,82, \quad \alpha = 35^\circ 10'.$$

Задача 5. Знайти кратність виродження основного терма атома, електронна конфігурація єдиної незаповненої підоболонки якого d^6 .

Розв'язання. Символ d відповідає $l = 2$. Загальна кількість електронів $n = 2(2l + 1) = 10$. Отже, d підоболонка заповнена більше як наполовину, а кількість електронів, якої не вистачає до заповнення підоболонки, дорівнює $k' = 4$. Згідно з принципом доповняльності В. Паулі та правилами Ф. Хунда (див. формули (4.52)) квантові числа для основного стану такі:

$$S = \frac{k'}{2} = 2, \quad L = \frac{k'(2l - k' + 1)}{2} = 2,$$

при цьому $J = L + S = 4$.

Отже, основний терм цієї конфігурації $^{2S+1}D_J = ^5D_4$, а його кратність виродження: $2J + 1 = 9$.

Задача 6. Атом, крім заповнених електронних оболонок, має три електрони (s, p, d) і перебуває у стані з максимально можливим для цієї конфігурації повним моментом імпульсу. Використовуючи

векторну модель атома, визначити кут між спіновим \vec{M}_S і повним \vec{M}_J моментами імпульсу атома.

Розв'язання. Будемо вважати, що атом має нормальний спін-орбітальний зв'язок. За теоремою косинусів з трикутника, утвореного векторами моментів імпульсів \vec{M}_J , \vec{M}_L та \vec{M}_S (див. рис. 4.6), знаходимо шуканий кут

$$\cos \alpha = \frac{M_J^2 + M_S^2 - M_L^2}{2M_S M_J}. \quad (1)$$

Повний момент імпульсу $M_J = \hbar \sqrt{J(J+1)}$ матиме максимальне значення за умови $J_{\max} = L_{\max} + S_{\max}$, звідки випливає, що максимальні значення матимуть також моменти $M_L = \hbar \sqrt{L_{\max}(L_{\max} + 1)}$ і $M_S = \hbar \sqrt{S_{\max}(S_{\max} + 1)}$.

Оскільки для заповнених оболонок $L = 0$, $S = 0$, то повний момент імпульсу дорівнює нулю. Тому слід розглянути лише s , p , d -електрони, для яких відповідно $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, $l_3 = 2$. Отже, $L_{\max} = l_1 + l_2 + l_3 = 3$. Максимальне спінове число для трьох електронів дорівнює $S_{\max} = 3 \cdot 1/2 = 3/2$, тоді $J_{\max} = 9/2$, а відповідні величини моментів:

$$M_J = \frac{3\hbar}{2} \sqrt{11}, \quad M_L = \frac{4\hbar}{2} \sqrt{3}, \quad M_S = \frac{\hbar}{2} \sqrt{15}.$$

Підставивши ці значення у вираз (1) та провівши розрахунки, дістаємо:

$$\cos \alpha = 0,857; \quad \alpha = 31^\circ.$$

Аудиторні задачі

1. Визначити, скільки спектральних ліній випромінює літєве джерело, яке постійно збуджують на рівень $4s$. (6)

2. Основним для атома натрію є стан $3s$. Поправка Рідберга для P -термів дорівнює — 0,87. Довжина хвилі резонансної лінії, що зумовлена переходом $3p \rightarrow 3s$, дорівнює 590 нм. Визначити потенціал іонізації атома натрію. (5 В)

3. У атома якого елемента заповнені K , L і M -оболонки, $4s$ -підоболонка і наполовину $4p$ -підоболонка? ($Z = 33$, As — арсен)

4. Розрахувати фактор Ланде для атомів: а) у S -станах; б) у синглетних станах. (а) $g = 2$, за винятком синглетного стану; б) $g = 1$)

5. Для системи, що складається з двох еквівалентних d -електронів, записати символи термів з найбільшим та найменшим можливим значенням повного механічного моменту. Яке його числове значення? (1G_4 і 3F_4 , $M_J = 2\hbar\sqrt{5}$; 1S_0 , $M_J = 0$)

6. У випадку чотирьох еквівалентних p -електронів принципу Паулі не суперечать терми 1S_0 , 3P_2 , 3P_1 , 3P_0 , 1D_2 . Який з цих термів є основним? (3P_2)

7. Антикатод рентгенівської трубки виготовлений з молібдену ($Z = 42$). Знайти мінімальну різницю потенціалів, яку потрібно прикласти до трубки, щоб у спектрі рентгенівського випромінювання з'явилися лінії K -серії молібдену. Довжина K -краю смуги поглинання $\lambda_K = 0,618 \text{ \AA}$. (20 кВ)

8. Знайти в електрон-вольтах енергію зв'язку K -електрона титану ($Z = 22$), для якого довжина хвилі L -краю смуги поглинання дорівнює $\lambda_L = 26,3 \text{ \AA}$. (5 кеВ)

9. Установити, які з переходів заборонені (відповідь обґрунтувати): ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$, ${}^3P_1 \rightarrow {}^2S_{1/2}$, ${}^3F_3 \rightarrow {}^3P_2$, ${}^4F_{7/2} \rightarrow {}^4D_{5/2}$. (другий, третій)

Навчальний елемент 5

АТОМИ В МАГНІТНИХ ПОЛЯХ. ЛАЗЕРИ

5.1. Ефект Зеємана

У разі розміщення джерела в магнітному полі його спектральні лінії розщеплюються. Таке явище спостерігалось уперше Питером Зеєманом (1896) і отримало назву *ефект Зеємана*. Розрізняють *простий* (нормальний) ефект Зеємана, коли спектральна лінія розщеплюється на три компоненти, і *складний* (аномальний) ефект Зеємана — лінія розщеплюється на багато компонентів. Назви «нормальний» і «аномальний» виникли тому, що розщеплення ліній на три компоненти вдалося пояснити законами класичної фізики, а складний ефект Зеємана класична фізика пояснити не спромоглася. Квантова механіка з успіхом пояснює як «складний», так і «простий» ефекти Зеємана.

Розщеплення спектральних ліній зумовлено розщепленням самих енергетичних рівнів, оскільки атом, що має магнітний момент, набуває в зовнішньому магнітному полі додаткової енергії

$$\Delta E = -\mu_B B, \quad (5.1)$$

де μ_B — проекція повного магнітного моменту атома на напрям поля \vec{B} .

Із урахуванням формули (4.34) енергію кожного розщепленого рівня можна записати так:

$$E = E_0 + \Delta E = E_0 + g\mu_B m_J B, \quad m_J = J, J-1, \dots, -J, \quad (5.2)$$

де E_0 — енергія рівня за відсутності магнітного поля.

Оскільки m_J змінюється від J до $-J$, то енергетичний рівень, якому відповідає терм $^{2S+1}L_J$, розщепиться на $2J+1$ рівновіддалених один

від одного підрівнів за умови, що множник Ланде не дорівнює нулю: $g \neq 0$. Якщо $g = 0$, то розщеплення не буде.

Отже, у разі відсутності магнітного поля стани, що відрізняються значенням квантового числа m_J , мають однакову енергію — виродження за квантовим числом m_J . У магнітному ж полі це виродження знімається — відбувається розщеплення ліній.

Простий ефект Зесмана. Так називають ефект, у якому спектральна лінія розщеплюється на *три* компоненти (під час спостереження перпендикулярно до магнітного поля). *Простий ефект Зесмана спостерігається, коли повний спіновий момент атома дорівнює нулю $S=0$. У цьому разі мультиплетність енергетичних рівнів дорівнює одиниці: $2S+1=1$ і $J=L$, $m_J = m_L$, $g=1$. Отже, простий ефект спостерігається в спектрах зі синглетними лініями.*

Розщеплення рівнів та спектральних ліній для переходу між станами з $L=1$ і $L=0$ ($P \rightarrow S$ перехід) зображено на рис. 5.1, а.

За відсутності поля спостерігається одна лінія, частота якої ω_0 . У разі ввімкнення магнітного поля, крім лінії ω_0 , з'являються дві симетрично розміщені додаткові лінії $\omega_0 + \Delta\omega$ і $\omega_0 - \Delta\omega$.

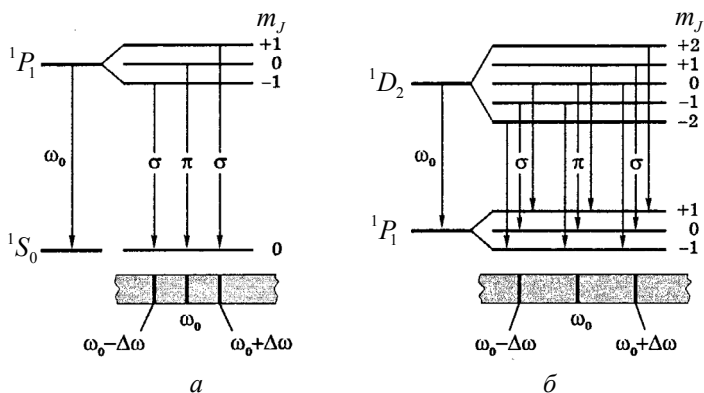


Рис. 5.1

Більш складний випадок зображено на рис. 5.1, б для переходу $D \rightarrow P$. Проте і тут спостерігаються ті самі три компоненти. Це пояснюється тим, що діє правило добору (4.37) згідно з яким:

$$\Delta m_J = 0, \pm 1 \quad (5.3)$$

(якщо $\Delta J = 0$, то перехід $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$ заборонено; на рис. 5.1 $\Delta J \neq 0$, тому переходи $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$ можливі).

Отже, можливими є переходи, що зображені на рис. 5.1, б, тому залишаються ті самі три компоненти з тими самими частотами, що й у випадку, зображеному на рис. 5.1, а (π - і σ -лінії мають різну поляризацію: у π -компоненті коливання вектора \vec{E} відбуваються вздовж магнітного поля \vec{B} , а у σ -компоненті — перпендикулярно до \vec{B}).

Згідно з формулою (5.2) частота ліній дорівнює

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\hbar}(E_2 - E_1) = \frac{1}{\hbar}[(E_{02} + g_2\mu_B m_{J2}B) - (E_{01} + g_1\mu_B m_{J1}B)] = \\ &= \frac{1}{\hbar}(E_{02} - E_{01}) + (g_2 m_{J2} - g_1 m_{J1}) \frac{\mu_B B}{\hbar} = \omega_0 + (g_2 m_{J2} - g_1 m_{J1}) \frac{\mu_B B}{\hbar}. \end{aligned}$$

Оскільки для простого ефекту $g_1 = g_2 = 1$, то

$$\omega = \omega_0 + (m_{J2} - m_{J1}) \frac{\mu_B B}{\hbar} = \omega_0 + \Delta m_J \frac{\mu_B B}{\hbar}. \quad (5.4)$$

Із урахуванням правила добору (5.3) за формулою (5.4) дістаємо для двох комбінованих рівнів три частоти: ω_0 і $\omega_0 \pm \Delta\omega_0$, де лоренцове зміщення дорівнює

$$\Delta\omega_0 = \frac{\mu_B B}{\hbar} = \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{B}{\hbar} = \frac{e}{2m_e} B. \quad (5.5)$$

Формула (5.5) не містить ні сталої Планка, ні квантових чисел. Це не випадково, оскільки $\Delta\omega_0$ збігається з ларморівською частотою, яку можна розрахувати класичним методом (див. модуль 3 «Електрика і магнетизм», підрозд. 4.5).

Оцінимо величину простого зєсманівського розщеплення для поля з індукцією $B = 1$ Тл (10^4 Гс). Оскільки $\lambda = 2\pi c / \omega$, то

$$|\Delta\lambda| = \frac{2\pi c}{\omega^2} \Delta\omega_0 = \frac{\pi c e B}{m_e \omega^2}.$$

Нехай частота видимого світла $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$ ($\lambda = 628 \text{ нм}$), тоді

$$|\Delta\lambda| = \frac{3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1}{0,91 \cdot 10^{-30} \cdot 9 \cdot 10^{30}} = 0,18 \cdot 10^{-10} \text{ м} \approx 0,2 \text{ \AA}.$$

Складний ефект Зеемана. Простий ефект Зеемана спостерігається у випадку, коли початкові спектральні лінії не мають тонкої структури, тобто є синглетами. Складний ефект Зеемана спостерігається для ліній з тонкою структурою, при цьому спектральна лінія від джерела, розміщеного в магнітному полі, розщеплюється на багато компонент (до кількох десятків). Це пов'язано із залежністю розщеплення самих рівнів від фактора Ланде g [див. формулу (5.2)], тобто з наявністю спіну електрона.

Приклад складного ефекту Зеемана зображено на рис. 5.2 — розщеплення жовтого дублету натрію, утвореного переходами $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ ($\lambda_1 = 5896 \text{ \AA}$) і $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ ($\lambda_2 = 5890 \text{ \AA}$). На відміну від простого ефекту, де $g = 1$, кожний з цих станів має своє значення фактора Ланде, яке розраховано за формулою (4.35).

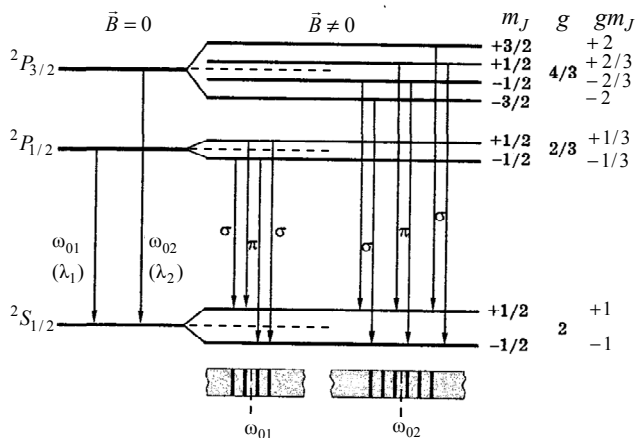


Рис. 5.2

На рис. 5.2 ліворуч зображено утворення жовтого дублету натрію (тонка структура) за відсутності магнітного поля, а праворуч — зееманівське розщеплення в слабкому магнітному полі

та переходи між рівнями, що підлягають правилу добору (5.3). У слабкому магнітному полі енергія взаємодії магнітного моменту атома з магнітним полем менша за енергію спин-орбітальної взаємодії, тому на рис. 5.2 величина тонкого розщеплення (відстань між рівнями ${}^2P_{3/2}$ і ${}^2P_{1/2}$) більша за зесманівське розщеплення.

Енергетичний рівень ${}^2P_{3/2}$ з повним моментом $J = 3/2$ розщеплюється на чотири підрівні ($m_J = -3/2, -1/2, 1/2, +3/2$), а рівні ${}^2P_{1/2}$ і ${}^2S_{1/2}$ на два підрівні ($m_J = -1/2, +1/2$). У результаті замість переходу $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ у магнітному полі виникають чотири переходи, а замість $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ — шість переходів.

Відстані між підрівнями, що виникають у результаті розщеплення, згідно з виразом (5.2) залежать від g . Оскільки для кожного з трьох рівнів ($3^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2}$ і $3^2S_{1/2}$) g має різні значення (рис. 5.2), то розщеплення цих рівнів також різне. Тому серед спектральних ліній немає ліній з однаковою частотою (довжиною хвилі). Отже, від Na джерела, розміщеного в слабкому магнітному полі, замість дублету спостерігатиметься спектр, що складається з 10 близьких ліній, розміщених двома групами. Частоти цих ліній з урахуванням різних значень g легко розрахувати за допомогою формули

$$\omega = \omega_0 + (g_2 m_{J_2} - g_1 m_{J_1}) \frac{\mu_B B}{\hbar} = \omega_0 + (g_2 m_{J_2} - g_1 m_{J_1}) \Delta\omega_0. \quad (5.6)$$

Добутки $g m_J$ є різними, тому другий доданок не може дорівнювати нулю. Це означає, що за наявності слабкого магнітного поля зникає початкова лінія з частотою ω_0 (рис. 5.2).

Ефект Пашена–Бака. У сильному магнітному полі зв'язок між \vec{M}_L і \vec{M}_S порушується і вони проєктуються на напрям магнітного поля незалежно один від одного. У цьому випадку енергія атома в сильному магнітному полі визначатиметься за формулою

$$E = E_0 + \Delta E = E_0 + (g_L \mu_B m_L B + g_S \mu_B m_S B). \quad (5.7)$$

Оскільки, як випливає з формули (4.35), $g_L = 1$ ($S = 0, J = L$), а $g_S = 2$ ($L = 0, J = S$), то

$$E = E_0 + \Delta E = E_0 + \mu_B B(m_L + 2m_S), \quad (5.8)$$

при цьому дозволені переходи відповідають правилам добору

$$\Delta m_L = 0, \pm 1, \quad \Delta m_S = 0. \quad (5.9)$$

Формула (5.8) показує, що в *сильному магнітному полі* відбувається розщеплення на *три компоненти*. Справді, згідно з правилом (5.9) переходи повинні відбуватися між рівнями з однаковими значеннями m_S , тому

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\hbar} [E_{02} + \mu_B B(m_{L2} + 2m_S)] - \frac{1}{\hbar} [E_{01} + \mu_B B(m_{L1} + 2m_S)] = \\ &= \frac{1}{\hbar} (E_{02} - E_{01}) + (m_{L2} - m_{L1}) \frac{\mu_B B}{\hbar} = \omega_0 + \Delta m_L \frac{\mu_B B}{\hbar}, \text{ або} \\ \omega &= \omega_0 + \Delta m_L \Delta \omega_0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Правила добору (5.9) дозволяють зміну m_L не більше як на одиницю, тому в сильному полі, крім незміщеної лінії з частотою ω_0 спостерігається по одній лінії, зміщеній на однакову відстань у червону ($\omega_0 - \Delta \omega_0$) та синю ($\omega_0 + \Delta \omega_0$) ділянки спектра. У результаті виникає простий зєсманівський триплет, схематично зображений на рис. 5.3. Зазначимо, що внаслідок руйнування спіно-орбітального зв'язку магнітне розщеплення (у сильному полі) суттєво більше за тонке розщеплення, тому рівні ${}^2P_{1/2}$ і ${}^2P_{3/2}$ на рис. 5.3 розміщені майже на одному рівні.

Отже, зі збільшенням індукції магнітного поля складна картина розщеплення — складний ефект Зєсмана — перетворюється на просту триплетну — простий ефект Зєсмана. Це явище було відкрито Фридрихом Пашеном і Ернстом Баком (1912) і названо їхніми іменами.

Таким чином, були розглянуті крайні випадки. Найбільш складною виявляється спектральна картина в проміжних магнітних полях.

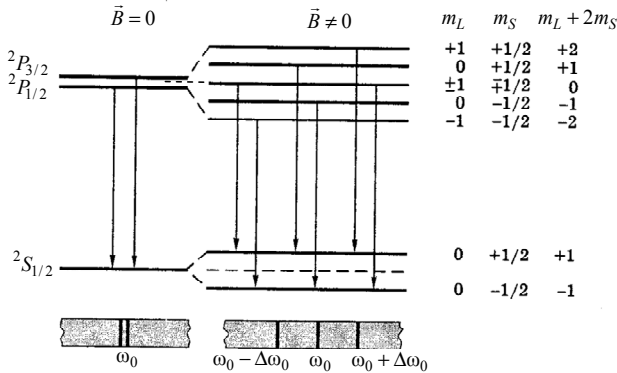


Рис. 5.3

5.2. Електронний парамагнітний резонанс

Як було встановлено вище, енергетичні рівні атомів з відмінним від нуля магнітним моментом у разі накладання магнітного поля зазнають зееманівського розщеплення.

Спонтанні електромагнітні переходи між підрівнями одного й того самого рівня малоймовірні.

Проте вони відбуваються під впливом зовнішнього електромагнітного випромінювання, якщо кванти випромінювання мають енергію (частоту), що дорівнює енергії (частоті) переходів між підрівнями [див. формулу (5.2)], тобто в разі виконання резонансної умови

$$\hbar\omega = \Delta E = g\mu_B |\Delta m_j| B. \tag{5.11}$$

Оскільки згідно з виразом (5.3) m_j може змінюватися на одиницю $|\Delta m_j| = 1$ (для розглядуваного випадку $\Delta m_j = 0$ не має змісту), то

$$\hbar\omega = g\mu_B B, \tag{5.12}$$

де $\hbar\omega$ — енергія квантів змінного падаючого електромагнітного поля; $g\mu_B B$ — величина зееманівського розщеплення рівня (в енергетичних одиницях) у сталому полі з індукцією B .

У разі виконання умови (5.12) спостерігається *електронний парамагнітний резонанс (ЕПР)* — явище відкрите Євгеном Завойським (1944).

Значимо, що раніше спостерігали ядерний магнітний резонанс, зумовлений магнітним моментом ядра, Исидор Раббі (1938).

Термін «електронний парамагнітний резонанс» указує на основні характеристики такого явища, а саме:

а) явище має резонансний характер — переходи виникають за певної частоти падаючого випромінювання;

б) відповідальним за розщеплення рівнів є магнітний момент атома, зумовлений орбітальними та спіновими моментами електронів незамкнених оболонок;

в) явище характерне лише для парамагнітних речовин (для діаманетиків магнітні моменти атомів дорівнюють нулю).

Оцінимо частоту випромінювання, що задовольняє умову (5.12), поклавши $B = 1$ Тл (10^4 Гс), $g = 1$:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{g\mu_B B}{2\pi\hbar} = \frac{1 \cdot 0,927 \cdot 10^{-23} \cdot 1}{2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} \approx 10^{10} \text{ Гц} = 10^4 \text{ МГц.}$$

$$\text{Це відповідає довжині хвилі } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см,}$$

отже, резонансні частоти знаходяться у мікрохвильовому радіодіапазоні ($\nu > 300$ МГц, $\lambda < 1$ м). Їх називають надвисокими частотами (НВЧ).

Слід зазначити, що за резонансу енергія передається не тільки від зовнішнього поля до атома, але й у зворотному напрямі — від атома до поля в разі переходу атома з більш високого зееманівського підрівня на нижчий. Проте за теплової рівноваги згідно із законом Больцмана кількість атомів з меншою енергією переважає кількість атомів з більшою енергією. Тому кількість переходів, що збільшують енергію атомів, переважає кількість переходів у зворотному напрямі. У результаті парамагнетик поглинає енергію падаючого радіочастотного поля та нагрівається.

Досліди з ЕПР дають змогу з умови резонансу (5.12) визначити одну з величин — g , B , $\omega_{\text{рез}}$ за відомими іншими величинами.

Наприклад, вимірявши з високою точністю індукцію поля B і $\omega_{\text{рез}}$, за допомогою ЕПР можна знайти значення g , а потім і магнітний момент атома в стані з квантовим числом J .

Для дослідження ЕПР застосовуються прилади — радіоспектроскопи. У них частота підтримується сталою, а індукція магнітного поля B , створювана електромагнітом NS , змінюється в широкому інтервалі (рис. 5.4).

Невеликий зразок A розміщується в резонаторі R , налаштованому на довжину хвилі $\lambda \sim 3$ см.

Радіохвилі такої довжини, створювані генератором G , потрапляють у резонатор R через хвилевід V (трубка з провідними стінками). Після часткового поглинання у зразку A вони потрапляють на детектор D .

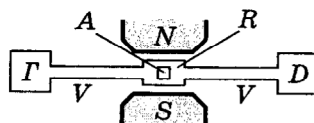


Рис. 5.4

Під час експерименту повільно змінюють магнітне поле. За величини індукції B , що задовольняє умову (5.12), спостерігається різке поглинання зразком падаючої радіохвилі.

За допомогою ЕПР отримано багато важливих відомостей про кінетику хімічних реакцій, особливо реакцій, у яких утворюються вільні радикали — проміжні продукти реакції.

Вільні радикали подібно до одновалентних атомів мають один електрон з некомпенсованим спіном; для них $J = 1/2$ і $\mu = \mu_B$. Зміна концентрації радикалів легко виявляється, якщо тільки їх кількість не дуже мала.

За допомогою магнітного резонансу також було досліджено магнітний момент протонів. Він виявився майже в 2,8 рази більшим за ядерний магнетон $\mu_p = 2,79\mu_y$.

Велика величина μ_p (на перший погляд, протон, як і будь-яка заряджена частинка зі спіном $1/2$, повинен був би мати магнітний момент, що дорівнює одиниці) зумовлена тим, що на відміну від електрона протон є ядерно-активною частинкою, тобто бере участь не тільки в електромагнітних явищах, але і в ядерних взаємодіях.

5.3. Спонтанне та індуковане випромінювання

Якщо атоми перебувають у збудженому стані з енергією E_n , то переходячи у стан з меншою енергією $E_m < E_n$, вони випромінюватимуть фотони, енергія яких визначається за формулою (2.18): $E_n - E_m = \hbar\omega_{nm}$. Процес випромінювання збудженими атомами без будь-якого зовнішнього впливу називають *спонтанним випромінюванням*. Імовірність таких переходів за одиницю часу характеризуватимемо величиною A_{nm} .

Незбуджені атоми, що перебувають на нижньому рівні E_m , будуть під впливом падаючого світлового поля переходити у збуджений стан E_n , поглинаючи енергію $E_n - E_m = \hbar\omega_{nm}$ падаючого світлового поля. Такі переходи називають *вимушеними* або *індукованими*, оскільки вони зумовлені зовнішнім випромінюванням.

Виявляється, проте, що процеси, що відбуваються під впливом падаючого світлового поля, не обмежуються поглинанням. Ейнштейн уперше звернув увагу на те, що врахування лише процесу поглинання дозволяє отримати формулу Віна, а не формулу Планка. Тому він висунув припущення про існування ще одного процесу — *вимушеного випромінювання*. Існування такого випромінювання узгоджується з тим фактом, що в стані термодинамічної рівноваги атомів з падаючим випромінюванням довільної інтенсивності необхідним є існування саме вимушених «випромінювальних» переходів, імовірність яких зростала б зі збільшенням інтенсивності падаючого світла, і навпаки.

Отже, якщо E_m і E_n — два рівні енергії, причому $E_n > E_m$, то під впливом падаючого світлового поля в атомах відбуватимуться переходи: $E_m \rightarrow E_n$ і $E_n \rightarrow E_m$. Переходи першого типу, що супроводжуються поглинанням енергії, відбуваються тільки під впливом падаючого світлового поля. Переходи другого типу відбуваються як *під дією поля* — *вимушене випромінювання*, так і *самочинно* — *спонтанне випромінювання*.

Очевидно, що ймовірність вимушених переходів як з поглинанням, так і з випромінюванням світла, пропорційна спектральній густині енергії w_ω падаючого світлового поля:

$P_{mn} = w_{\omega} B_{mn}$ — імовірність переходу атома за одиницю часу з рівня E_m на рівень E_n , а $P_{nm} = w_{\omega} B_{nm}$ — імовірність зворотного переходу. Коефіцієнти пропорційності B_{mn} і B_{nm} , що характеризують відповідно ймовірність вимушеного поглинання і вимушеного випромінювання світла, а також A_{nm} називають *коефіцієнтами Ейнштейна*. Виходячи з термодинамічних міркувань (квантової механіки тоді ще не існувало), Ейнштейн показав, що $P_{nm} = P_{mn}$, звідки випливає, що $B_{nm} = B_{mn}$ (для простих невідроджених рівнів).

Вимушене випромінювання має важливі властивості. Напрямок його поширення точно збігається з напрямом поширення падаючого випромінювання. Те саме стосується частоти, фази та поляризації. Отже, вимушене та падаюче випромінювання виявляються строго когерентними. Ця особливість є підґрунтям створення генераторів світла — лазерів (див. підрозд. 5.4).

Спираючись на рівноймовірність вимушених переходів, А. Ейнштейн доволі просто отримав формулу Планка.

Будемо вважати, що атоми речовини перебувають у термодинамічній рівновазі з падаючим випромінюванням. Нехай кількість атомів у стані з більшою енергією E_n дорівнює N_n , а у стані з меншою енергією E_m — N_m . Статистична рівновага між процесами випромінювання і поглинання буде відбуватися за умови, коли кількість переходів $n \rightarrow m$ за одиницю часу дорівнюватиме кількості зворотних переходів $m \rightarrow n$. Переходи з випромінюванням відбуваються або спонтанно, або вимушено. Повна ймовірність тих і тих дорівнює $A_{nm} + P_{nm} = A_{nm} + w_{\omega} B_{nm}$, а середня кількість переходів за одиницю часу

$$Z_{nm} = (A_{nm} + w_{\omega} B_{nm}) N_n. \quad (5.13)$$

Імовірність переходів з поглинанням $P_{mn} = w_{\omega} B_{mn}$, тоді середня кількість переходів $m \rightarrow n$ за одиницю часу становитиме

$$Z_{mn} = w_{\omega} B_{mn} \cdot N_m. \quad (5.14)$$

У разі рівноваги $Z_{nm} = Z_{mn}$, тобто

$$(A_{nm} + w_{\omega} B_{nm}) N_n = w_{\omega} B_{mn} N_m, \quad (5.15)$$

звідки

$$w_{\omega}(T) = \frac{A_{nm} N_n}{B_{mn} N_m - B_{nm} N_n} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{N_m / N_n - 1} \quad (5.16)$$

(ураховано, що $B_{nm} = B_{mn}$).

Рівноважний розподіл атомів за станами з різною енергією визначається законом Больцмана, відповідно до якого

$$\frac{N_m}{N_n} = \frac{e^{-E_m/kT}}{e^{-E_n/kT}} = e^{(E_n - E_m)/kT} = e^{\hbar\omega/kT}. \quad (5.17)$$

Тоді вираз (5.16) перетворюється на такий:

$$w_{\omega}(T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (5.18)$$

Для визначення величини A_{nm}/B_{nm} А. Ейнштейн скористався тим, що формула Планка для малих частот (або високих температур) повинна переходити у формулу Релея–Джінса:

$$w_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT \quad [\text{див. формулу (1.19)}]. \text{ За умови } \hbar\omega \ll kT \text{ можна}$$

виконати заміну $e^{\hbar\omega/kT} \approx 1 + \hbar\omega/kT$, у результаті чого вираз (5.18) набуде вигляду

$$w_{\omega}(T) = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{kT}{\hbar\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT,$$

звідки

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

Підставивши це значення у вираз (5.18), дістанемо формулу Планка [див. (1.35)]

$$w_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (5.19)$$

5.4. Лазери

У 50-ті роки минулого століття були створені перші пристрої, у яких падаюче електромагнітне випромінювання підсилюється за рахунок *вимушеного випромінювання*, відкритого А. Ейнштейном. Такі пристрої отримали назву квантових генераторів. За їх створення Миколаю Басову і Олександрю Прохорову, а також американському фізику Чарльзу Таунсу була присуджена Нобелівська премія (1964).

Квантові генератори, що випромінюють в діапазоні видимого та інфрачервоного світла, дістали назву *лазерів* (перші літери від англійської назви: *light amplification by stimulated emission of radiation* — підсилення світла індукованим випромінювання; у генераторах, що працюють у мікрохвильовому діапазоні, літеру *l* (*light* — світло) замінюють на *m* — *мазер*). Падаюче світло з частотою ω , яка збігається з однією з частот $(E_n - E_m)/\hbar$ ($E_n > E_m$) атомів речовини, буде викликати два процеси: 1) вимушений перехід $m \rightarrow n$, який зумовлює поглинання світла та ослаблення падаючого випромінювання; 2) вимушений перехід $n \rightarrow m$, що підсилює інтенсивність падаючого світла (див. підрозд. 5.3). Результуюча зміна інтенсивності залежатиме від того, який з двох процесів переважатиме. Із формули (5.15) видно, що за термодинамічної рівноваги $N_m > N_n$ — кількість атомів, що поглинають енергію більша за кількість атомів, які випромінюють. Отже, інтенсивність падаючого світла під час проходження крізь речовину буде послаблюватися.

Від'ємна температура. Для того щоб підсилити падаюче світло, слід створити протилежну умову $N_n > N_m$, тобто, щоб у стані з більшою енергією E_n (у збудженому стані) перебувала більша кількість атомів, ніж у стані з меншою енергією E_m . У цьому випадку говорять, що система атомів має *інверсну населеність*. За такої умови формула (5.17) набуває вигляду

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{e^{-E_n/kT}}{e^{-E_m/kT}} = e^{-(E_n - E_m)/kT}, \quad (5.20)$$

де $(N_n / N_m) > 1$, $(E_n - E_m) > 0$.

Співвідношенням (5.20) можна користуватися, якщо формально вважати, що температура від'ємна $T < 0$. Іноді стани з інверсною населеністю називають станами з від'ємною температурою.

Від'ємне поглинання. Поглинання світла підлягає закону Бугера (див. модуль 5 «Оптика», підрозд. 5.3.1)

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (5.21)$$

де α — додатний коефіцієнт поглинання.

У речовині з інверсною населеністю енергетичних рівнів вимушене випромінювання може перевищити поглинання світла, унаслідок чого падаюче світло під час проходження крізь середовище буде підсилюватися $I > I_0$.

У випадку підсилення падаючого світла перебіг явища відбувається так, нібито коефіцієнт поглинання α у формулі (5.21) став від'ємним. Відповідно сукупність атомів з інверсною населеністю розглядають як середовище з від'ємним коефіцієнтом поглинання.

Рубіновий лазер. Створення лазерів стало можливим, коли знайшли способи здійснення інверсної населеності рівнів у речовинах.

У першому лазері як робоче тіло використали кристал рубіна у вигляді циліндра діаметром 1 см і завдовжки ~ 5 см. Торці рубінового стрижня були ретельно відполіровані та являли собою два паралельні одне одному дзеркала.

Один з торців покривали товстим шаром срібла, а другий напівпрозорим, який пропускав приблизно 8 % падаючої на нього енергії. Для *накачування* рубінового стрижня світлом використовували імпульсну газорозрядну трубку, яка випромінювала світло в широкому діапазоні частот і була навита на стрижень у вигляді спіралі.

Рубін — оксид алюмінію (Al_2O_3), у кристалічній ґратці якого певна кількість атомів Al замінена на іони Cr^{3+} . Саме іони хрому є активною речовиною, у якій відбуваються вимушені переходи і вони ж надають рожевого забарвлення кристалу рубіну.

За рахунок зовнішнього світлового накачування іони хрому переходять у збуджений стан, поглинаючи зелене світло (рис. 5.5).

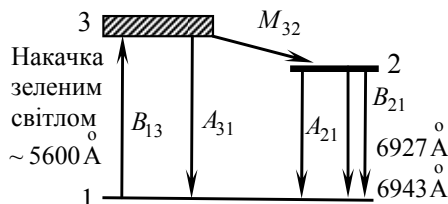


Рис. 5.5

Зворотний перехід відбувається у два етапи. На першому етапі збуджені іони, віддаючи частину своєї енергії кристалічній ґратці, без випромінювання переходять у метастабільний стан. Час життя у цьому стані $\sim 10^{-3}$ с, що приблизно в 10^5 разів перевищує час життя звичайного збудженого стану $\sim 10^{-8}$ с. Тому в метастабільному стані іони хрому мають змогу накопичуватися. На другому етапі іони хрому з метастабільного стану переходять в основний, випромінюючи фотони з довжинами хвиль 6927 \AA і 6943 \AA червоного світла.

На рис. 5.5 рівень 3 фактично є смугою, утвореною сукупністю близько розміщених рівнів, а рівень 2 подвійний.

Збудження іонів за рахунок накачки зображено стрілкою B_{13} . Час життя на рівні 3 становить $\sim 10^{-8}$ с.

Протягом цього часу деякі іони переходять спонтанно з рівня 3 на основний рівень 1. Такі переходи зображені стрілкою A_{31} . Проте переважна більшість іонів перейде на метастабільний рівень 2, час життя на якому $\sim 10^{-3}$ с.

Імовірність таких переходів (стрілка M_{32}) значно більша, ніж імовірність переходів A_{31} .

За достатньої потужності накачки кількість іонів хрому на метастабільному рівні 2 стає більшою за кількість іонів на основному рівні 1, тобто виникає інверсія населеності рівнів 1 і 2. За такої умови достатньо кількох фотонів, звільнених за рахунок

спонтанних переходів (стрілка A_{21}), щоб розпочався процес вимушених переходів (стрілка B_{21}). При цьому звільнені фотони у свою чергу викликатимуть нові вимушені переходи — процес стає лавиноподібним. Цьому сприяє багаторазове відбивання зростаючої лавини на протилежних торцях кристала. Лавина зростає, поширюючись туди і сюди усередині кристала паралельно його осі, оскільки фотони, випадково випромінені в інших напрямках, залишають кристал крізь його бокову поверхню. Коли інтенсивність лавини фотонів досягає певної критичної величини, частина її крізь напівпрозорий торець виходить з кристала і поширюється у вигляді вузького майже паралельного пучка променів.

Рубіновий лазер працює виключно в імпульсному режимі. Усередині кристала виділяється велика кількість теплоти, тому його інтенсивно охолоджують рідким азотом.

Перший газовий лазер — це лазер, що працював на суміші гелію і неону, яка розміщена між двома паралельними дзеркалами. Газові лазери працюють у неперервному режимі. Ще пізніше з'явилися напівпровідникові лазери. Натепер список лазерних матеріалів нараховує багато десятків твердих, рідких та газоподібних речовин.

Незважаючи на різноманітність, головні принципи дії квантових генераторів світла однакові. Активну речовину слід вибрати такою, щоб світло джерела накачки використовувалося найефективніше. Для цього необхідно, щоб рівень 3 (рис. 5.5) був достатньо широким, отже, короткоживучим. Рівень 2, навпаки, повинен бути довгоживучим, щоб спонтанне випромінювання з цього рівня не конкурувало з вимушеним.

Випромінювання лазерів характеризується надзвичайними особливостями, зокрема такими: 1) мала розбіжність пучка променів; 2) високий ступінь монохроматичності $\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ \AA}$; 3) висока часова та просторова когерентність; 4) велика інтенсивність (особливо імпульсних лазерів).

Випромінювання лазерів є не тільки монохроматичним і характеризується малою розбіжністю пучка, але є також повністю поляризованим.

Пучок променів, що вийшов з лазера, має гостру напрямленість. Але хвильові властивості світла не дозволяють отримати нульовий кут розбіжності. Явище дифракції на отворі з діаметром, що дорівнює діаметру дзеркала, визначає мінімальний кут розбіжності $\varphi_{\min} = 1,22\lambda / D$. Ніякими іншими способами неможливо отримати джерела, подібні до лазера за напрямленістю та монохроматичністю світла.

Велика інтенсивність та вузькість лазерного пучка дозволяє виконувати зварювання та механічну обробку, зокрема робити найменші отвори в найтвердішому матеріалі — алмазі.

Висока когерентність випромінювання відкриває широкі перспективи використання лазерів для здійснення радіозв'язку, зокрема для направленого зв'язку у космосі. Крім того, якщо врахувати, що частота оптичних лазерів $\sim 10^{15}$ Гц перевищує частоту радіозв'язку в $10^7 - 10^9$ разів, то з'являється перспектива передавати по одному каналу величезний обсяг інформації, наприклад, десятки тисяч звукових і сотні телевізійних програм одночасно.



Запитання та завдання для самоконтролю

1. Яке явище називають ефектом Зеємана? Від яких факторів залежить величина зеєманівського розщеплення? За яких умов виникає простий і складний ефект Зеємана?
2. Яке магнітне поле вважається слабким, а яке сильним?
3. Запишіть правило добору для магнітного числа m_J .
4. Що називають ефектом Пашена–Бака?
5. Чи залежить розщеплення спектральних ліній від фактора Ланде?
6. Що називають явищем ЕПР? Назвіть основні його характеристики.
7. Що називають спонтанним і вимушеним (індукованим) випромінюванням? Який фізичний зміст коефіцієнтів Ейнштейна?
8. Що таке лазер і які властивості його випромінювання?

9. Поясніть терміни: інверсна населеність, від'ємна температура, від'ємне поглинання.

10. Опишіть принцип дії лазера. Назвіть головні його особливості.

Задачі

Приклади розв'язування задач

Задача 1. На скільки підрівнів розщепляться в слабкому магнітному полі терми ${}^2F_{5/2}$ і ${}^4D_{1/2}$?

Розв'язання. Величина розщеплення енергетичного рівня $\Delta E = g\mu_B m_J B$ [див. вираз (5.2)] залежить від множника Ланде

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

і квантового числа m_J . Якщо $g \neq 0$, то

кількість розщеплених рівнів набудатиме $2J+1$ значень.

Для терма ${}^2F_{5/2}$ ($L=3$, $S=1/2$, $J=5/2$) $g = 6/7$, тому після розщеплення утвориться 6 підрівнів. Для терма ${}^4D_{1/2}$ ($L=2$, $S=3/2$, $J=1/2$) $g = 0$, отже, цей терм не розщепиться.

Задача 2. Який ефект Зеемана (простий чи складний) спостерігатиметься в слабкому магнітному полі для спектральних ліній, що зумовлені переходом ${}^1P \rightarrow {}^1S$? Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання. Для терма 1P сумарне орбітальне квантове число дорівнює $L=1$. Мультиплетність $2S+1=1$, тому сумарне спінове число $S=0$, а квантове число повного моменту $J=L+S=1$ ($J=L$). Множник Ланде не дорівнює нулю ($g=1$), отже магнітне квантове число набуває трьох значень: $m_J = 1, 0, -1$ — розщеплення терма на три підрівня.

Терм 1S має сумарне орбітальне квантове число $L=0$. Як і в попередньому випадку, терм синглетний, тому $S=0$, але $J=L+S=0$, звідки $m_J = 0$ — розщеплення не відбувається.

Із урахуванням правила добору $\Delta m_J = 0, \pm 1$ робимо висновок: спостерігаються три спектральні лінії, зумовлені розщепленням терма 1P на три компоненти, — простий ефект Зеемана.

Нагадаймо, що для простого ефекту Зесмана множники Ланде однакові для станів, між якими відбуваються переходи, а для складного ефекту вони неоднакові. Тому можна констатувати: якщо $g_1 = g_2$ — ефект простий, а для $g_1 \neq g_2$ — складний. Більш того, можна стверджувати, що ефект простий, оскільки мультиплетність енергетичних рівнів дорівнює одиниці.

Задача 3. На газ, атоми якого перебувають у стані $^2D_{3/2}$, одночасно діє стале магнітне поле B і перпендикулярно до нього змінне поле B_ν з частотою $\nu = 2,8 \cdot 10^9$ Гц. За якої величини сталого поля B виникатиме резонансне поглинання енергії змінного електромагнітного поля?

Розв'язання. Для терма $^2D_{3/2}$ квантові числа такі: $S = 1/2$, $L = 2$, $J = 3/2$, а фактор Ланде:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = 0,8.$$

Електронний парамагнітний резонанс виникає за умови $\hbar 2\pi\nu = g\mu_B B$, звідки знаходимо величину сталого поля

$$B = \frac{\hbar 2\pi\nu}{g\mu_B} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 6,28 \cdot 2,8 \cdot 10^9}{0,8 \cdot 0,927 \cdot 10^{-23}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ Гс}.$$

Аудиторні задачі

1. Побудувати схему можливих енергетичних переходів у слабкому магнітному полі між термами $^2P_{3/2}$ і $^2S_{1/2}$. Розрахувати для $B = 4,5$ кГс зміщення зесманівських компонент цієї лінії (у частотах). [$\Delta\omega = \pm 1,3; \pm 4,0; \pm 6,7$] $\cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, шість компонент]

2. Записати в магнетонах Бора магнітний момент атома у станах: а) 3S_1 ; б) 1P_0 ; в) 1P_1 ; г) 5F_1 ; д) 7H_2 . (а) $\mu = \mu_B 2\sqrt{2}$; б) $\mu = 0$; в) $\mu = \mu_B \sqrt{2}$; г) і д) $\mu = 0$)

3. На скільки компонент розщепиться пучок атомів у досліді О. Штерна і В. Герлаха, якщо атоми перебувають у станах а) $^2P_{3/2}$; б) 3D_1 ; в) 3F_4 ? (на 4; 3; 9)

4. На скільки підрівнів розщепляться в слабкому магнітному полі терми: а) 3P_0 ; б) ${}^1F_{5/2}$? (а) не розщепиться; б) на 6)

5. Атом перебуває у магнітному полі з індукцією 1 Тл. Знайти повне розщеплення ΔE (в еВ) терма 1P . ($1,16 \cdot 10^{-4}$ еВ)

6. Розрахувати зміщення $\Delta\omega$ спектральних ліній у складному ефекті Зеемана для випадку переходу атома зі стану ${}^2P_{1/2}$ у стан ${}^2S_{1/2}$. За одиницю зміщення узяти нормальне (лоренцове) зміщення

$$\Delta\omega_0 = \mu_B B / \hbar \cdot \left(\frac{4}{3} \Delta\omega_0 ; \frac{2}{3} \Delta\omega_0 ; -\frac{2}{3} \Delta\omega_0 ; -\frac{4}{3} \Delta\omega_0 \right)$$

7. Який ефект Зеемана (простий чи складний) спостерігатиметься в слабкому магнітному полі для спектральних ліній, зумовлених переходом ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$? (складний). Відповідь обґрунтувати

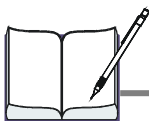
8. Магнітне поле у випадку складного ефекту Зеемана вважається слабким, якщо зееманівське розщеплення терма значно менше від природного мультиплетного (тонкого) розщеплення. Визначити, за якої величини індукції магнітного поля інтервал між сусідніми підрівнями зееманівського розщеплення термів ${}^2P_{3/2}$ і ${}^2P_{1/2}$ атома Na буде складати 10 % від природного розщеплення 2P стану, якщо довжини хвиль жовтого дублета натрію дорівнюють

$$\lambda_1 = 5896 \text{ \AA} \quad ({}^3P_{1/2} \rightarrow {}^3S_{1/2}) \quad \text{і} \quad \lambda_2 = 5890 \text{ \AA} \quad ({}^3P_{3/2} \rightarrow {}^3S_{1/2}).$$

($B = 2,77$ Тл для терма ${}^2P_{3/2}$ і $5,54$ Тл для терма ${}^2P_{1/2}$)

Навчальний елемент 6

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ



Лабораторна робота 1

ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ ТЕПЛОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Мета роботи: вивчити закони теплового випромінювання абсолютно чорного тіла та обчислити сталу Стефана–Больцмана.

Прилади та обладнання: установка для вивчення абсолютно чорного тіла ФПК 11.

Теоретичні відомості

Відомо, що нагріті тіла випромінюють електромагнітні хвилі за рахунок перетворення теплової енергії в енергію випромінювання. Теплове випромінювання займає особливе місце, оскільки це єдиний вид випромінювання, який може перебувати у термодинамічній рівновазі з іншими випромінювальними тілами. Для рівноважного випромінювання розподіл енергії між тілом і випромінюванням залишається незмінним для кожної частоти (довжини хвилі).

Теплове випромінювання характеризують *енергетичною світністю* – потоком енергії, або, що те саме, потужністю, яку випромінює тіло за даної температури з одиниці поверхні ($M = dP/dS$) в усьому інтервалі частот і за всіма напрямками в межах тілесного кута 2π (усередину півсфери). Енергетична світність є функцією температури $M = M(T)$, розмірність цієї величини — Вт/м².

Теплове випромінювання складається з різних частот ω , тому випромінювання певної ділянки спектра характеризують *спектральною густиною енергетичної світності*

$$M_{\omega} = dM / d\omega, \quad (1)$$

де dM — енергетична світність, що припадає на інтервал частот $(\omega, \omega + d\omega)$.

Спектральна густина енергетичної світності характеризує випромінювання тільки певної частоти; вона є функцією як частоти, так і температури $M_{\omega} = M_{\omega}(T)$. Цю величину використовують для характеристики випромінювальної здатності тіла, тому надалі називатимемо її *випромінювальною здатністю тіла*.

Якщо на тіло падає випромінювання, то частина його неминуче відбивається, решта проникає всередину тіла. Частину від усієї падаючої енергії, що залишається всередині тіла і перетворюється в тепло, називають *поглинальною здатністю тіла*:

$$A_{\omega} = \frac{dW'_{\omega} / dt}{dW_{\omega} / dt}. \quad (2)$$

Тут dW'_{ω} / dt — енергія, поглинута ділянкою поверхні тіла за одиницю часу в інтервалі частот від ω до $\omega + d\omega$; dW_{ω} / dt — повна енергія випромінювання, що ізотропно падає за одиницю часу на одну й ту саму ділянку поверхні в одному і тому самому інтервалі частот. Безрозмірна величина A_{ω} залежить від частоти і температури, тобто спектральна поглинальна здатність є функцією частоти і температури $A_{\omega} = A_{\omega}(T)$.

За законом, установленим Г. Кірхгофом (1859), у стані термодинамічної рівноваги відношення випромінювальної здатності тіла до його поглинальної здатності однакове для всіх тіл і є універсальною функцією лише частоти та температури:

$$\frac{M_{\omega}(T)}{A_{\omega}(T)} = f_{\omega}(T). \quad (3)$$

Незважаючи на те, що це відношення однакове для всіх тіл, самі величини $M_{\omega}(T)$ і $A_{\omega}(T)$ можуть суттєво змінюватися під час переходу від одного тіла до іншого

Для абсолютно чорного тіла $A_{\omega}(T) = 1$. Відповідно до формули (3) це означає, що абсолютно чорного тіла випромінювальна здатність дорівнює універсальній функції Кірхгофа $M_{\omega}(T) = f_{\omega}(T)$. Абсолютно чорних тіл у природі не існує, проте його моделлю є непрозора порожнина з малим отвором, температура стінок якої підтримується сталою. За допомогою такої моделі були експериментально досліджені закони теплового випромінювання. Декілька кривих розподілу енергії в спектрі абсолютно чорного тіла для різних температур зображено на рис. 1.

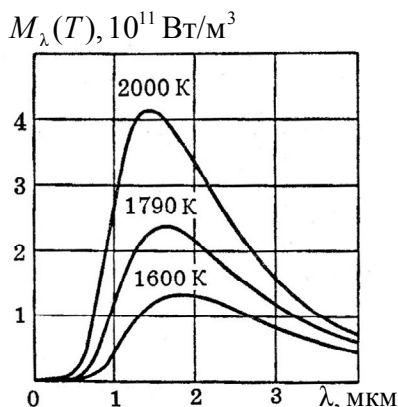


Рис. 1

Видно, що енергетична світність абсолютно чорного тіла $M(T)$ (площа під кривою) суттєво збільшується з підвищенням температури, при цьому максимум випромінювальної здатності з підвищенням температури зсувається в бік коротких хвиль.

Видимий діапазон довжин хвиль 0,4–0,76 мкм займає незначну частину площі під кривими (приблизно 3–5%), ще меншу частину площі займає ультрафіолетове випромінювання.

Основна частина площі припадає на невидимі інфрачервоні промені.

Теоретичне пояснення законів випромінювання абсолютно чорного тіла мало велике значення, оскільки воно привело до поняття квантів енергії.

Закон, що пов'язує енергетичну світність абсолютно чорного тіла M^* з абсолютною температурою T , називають законом Стефана–Больцмана:

$$M^* = \sigma T^4. \quad (4)$$

Коефіцієнт пропорційності $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ називають сталою Стефана–Больцмана.

Положення максимуму випромінювальної здатності (рис. 1) дозволяє встановити закон зміщення Віна:

$$T\lambda_{\max} = b, \quad (5)$$

де $b = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ — стала Віна.

Джон Релей і Джеймс Джинс, застосувавши до рівноважного випромінювання в порожнині закон рівномірного розподілу енергії за степенями вільності, отримали вираз для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла, тобто функцію Кірхгофа у вигляді

$$f_{\omega}(T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT. \quad (6)$$

Співвідношення (6) задовільно описує експериментальні дані для великих довжин хвиль λ і різко розходиться з дослідом за малих значень λ — «ультрафіолетова катастрофа» (див. підрозд. 1.1.4).

У 1900 р. М. Планку вдалося знайти вигляд функції $f_{\omega}(T)$, що відповідає дослідним даним у всьому спектрі частот. Для цього йому довелося висунути припущення, не сумісне з уявленнями класичної фізики, а саме: збуджені атоми *випромінюють енергію не безперервно, а у вигляді окремих порцій — квантів, величина яких пропорційна частоті випромінювання:*

$$\varepsilon = h\nu \equiv \hbar\omega. \quad (7)$$

Коефіцієнт пропорційності h (або \hbar) дістав назву сталої Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ($\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$).

Отриманий М. Планком вираз має вигляд

$$f_{\omega}(T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (8)$$

з якого випливає закон зміщення Віна

$$T\lambda_{\max} = b = \frac{2\pi c\hbar}{4,965k} = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} \text{ (див. підрозд. 1.1.7).}$$

Крім цього, для великих довжин хвиль λ (малих ω) формула Планка переходить у формулу Релея–Джинса (6), а інтегрування цієї формули за всіма частотами дає закон Стефана–Больцмана (див. підрозд. 1.1.6 і 1.1.7):

$$M^*(T) = \int_0^{\infty} f_{\omega}(T) d\omega = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} T^4 = \sigma T^4. \quad (9)$$

Узявши логарифм виразу (9), дістанемо рівняння

$$\lg M^* = \lg \sigma + \lg T^4. \quad (10)$$

У координатах $\lg M^*$ від $\lg T^4$ закон Стефана–Больцмана має лінійну залежність. Якщо при побудові графіка продовжити пряму в область низьких температур до перетину з віссю ординат ($\lg M^*$), як зображено на рис. 2, то точка перетину відповідатиме умові $\lg M^* = \lg \sigma \Rightarrow M^* = \sigma$, оскільки в цій точці $\lg T^4 = 0 \Rightarrow T = 1 \text{ К}$. Саме за такої низької температури виконується рівність $M^* = \sigma$.

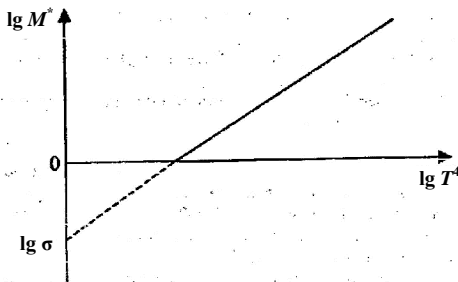


Рис. 2

Метод і дослідна установка

Для вивчення закону Стефана–Больцмана та визначення сталої σ у лабораторній роботі використовується дослідна установка ФПК 11 (рис. 3), до складу якої входить електропіч 1, що живиться

напругою 220 В з частотою 50 Гц. Електропіч являє собою модель абсолютно чорного тіла і виконана у вигляді закритої термоізолюваної печі з невеличким отвором на передній стінці. У теплозахисний корпус вмонтовані: нагрівальний пристрій, термopара, джерело живлення. Максимальна величина температури, до якої може розігрітися електропіч, становить $T_{\max} = 800^{\circ}\text{C}$.

Вимірювальний пристрій 2 використовується для вимірювання та індикації температури печі, а також термоелектрорушійної сили (термо-ЕРС) термостовпчика. За допомогою термостовпчика 3 вимірюється випромінювальна енергія, що виходить з отвору електропечі назовні.

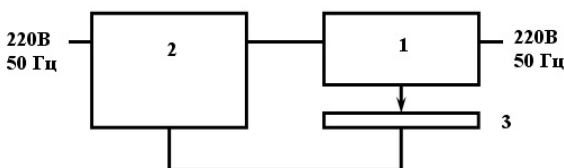


Рис. 3

Електрорушійна сила (ЕРС) термостовпчика пропорційна потужності падаючого на його поверхню випромінювання, отже, вона пропорційна енергетичній світності M^* :

$$\text{ЕРС} \sim N \sim M^*(T). \quad (11)$$

Знайти залежність потужності падаючого випромінювання від термо-ЕРС термостовпчика можна за допомогою графіка, зображеного на рис. 4.

Отже, визначивши залежність ЕРС термостовпчика від температури, можна дослідити залежність випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від температури та перевірити виконання закону Стефана–Больцмана.

Потужність теплового випромінювання печі пов'язана з енергетичною світністю таким виразом:

$$N = M^* S, \quad (12)$$

де S — площа отвору на передній стінці електропечі ($S = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$).

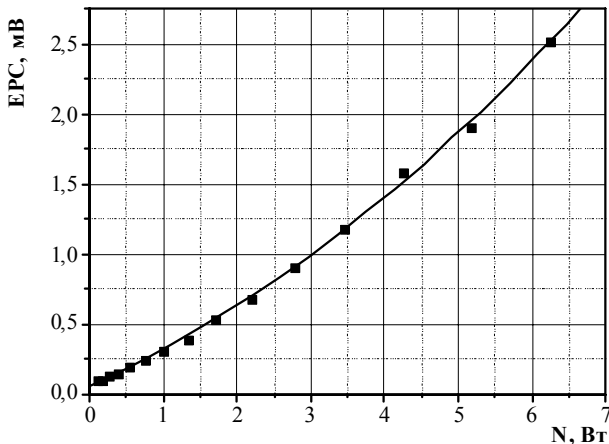


Рис. 4

Тоді сталу Стефана–Больцмана можна розрахувати за формулою

$$\sigma = \frac{M^*}{T^4} = \frac{N}{ST^4}. \quad (13)$$

Отже, для експериментального визначення сталої Стефана–Больцмана потрібно знати N і S .

Порядок виконання роботи та опрацювання результатів вимірювань

1. Вимірювання ЕРС термостовпчика.

1.1. Установити термостовпчик так, щоб його отвір був навпроти отвору на передній панелі електропечі на відстані 2 мм.

1.2. Підключити до мережі електроживлення електропіч та вимірювальний пристрій.

1.3. Увімкнути вимірювальний пристрій, натиснувши вимикач на його задній панелі, та прогріти протягом ~ 5 хв, щоб на індикаторах температури і термо-ЕРС установилися відповідно значення 000 та 0,00.

1.4. Увімкнути електропіч, натиснувши вимикач. На верхній панелі електропечі виставити швидкість нагріву в межах 4–5. Чекаєти, поки електропіч не розігріється до температури $t' = 200$ °С.

1.5. У табл. 1. внести значення термо-ЕРС стовпчика, що відповідає температурі $t' = 200\text{ }^{\circ}\text{C}$.

1.6 Повторити п. 1.5, збільшуючи значення температури. Виконати вимірювання для шести значень температури з кроком $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ (до $700\text{ }^{\circ}\text{C}$ включно). Результати занести до табл. 1.

1.7. Після завершення вимірювань вимкнути електропіч, натиснувши вимикач. Натиснути вимикач вентилятора (обов'язково!) для ввімкнення режиму охолодження електропечі (вимірювальний пристрій не вимикати!).

1.8. Температура печі t визначається як сума вимірюного значення та температури навколишнього середовища (кімнатної температури): $t = t_{\text{кім}} + t'$.

1.9. Після охолодження печі натиснути вимикач вентилятора та вимкнути установку ФПК 11, натиснувши вимикач на задній панелі вимірювального приладу.

Таблиця 1

Номер досліджу	t' , $^{\circ}\text{C}$	t , $^{\circ}\text{C}$	T , К	Термо-ЕРС, мВ	N , Вт	σ_{i_2} , Вт/м ² К ⁴	$\langle\sigma\rangle$, Вт/м ² К ⁴	$\Delta\sigma$, Вт/м ² К ⁴	ε , %
1									
2									
3									
4									
5									
6									

2. Визначення сталої Стефана–Больцмана.

2.1. За наведеним графіком залежності потужності електропечі N від термо-ЕРС електропечі (рис. 4), користуючись отриманими під час експерименту значеннями термо-ЕРС, знайти відповідну потужність випромінювання N . Отримані значення занести до табл. 1.

2.2. За виразом (13) визначити сталу Стефана–Больцмана. Результати занести до табл. 1.

2.3. За отриманими результатами знайти середнє значення $\langle\sigma\rangle$, значення абсолютної та відносної похибок σ як для прямих

вимірювань. Результати занести до табл. 1. Значення $\langle \sigma \rangle$ порівняти з довідниковим значенням.

3. Графічна перевірка закону Стефана–Больцмана.

3.1. За даними табл. 1, використовуючи вираз (4), розрахувати енергетичну світність електропечі M^* . Результат розрахунків занести до табл. 2.

Таблиця 2

Номер досліджу	M^* , Вт/м ²	$\lg M^*$	$\lg T^4$	σ , Вт/м ² ·К ⁴
1				
2				
3				
4				
5				
6				

3.2. Перевірити справедливість закону Стефана — Больцмана, побудувавши залежність $\lg M^* = f(\lg T^4)$. Для побудови графіка використати результати розрахунків з табл. 2.

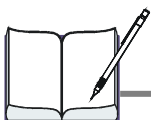
3.3. Визначити величину $\lg \sigma$ і відповідно величину сталої Стефана–Больцмана σ як точку перетину продовження прямої $\lg M^* = f(\lg T^4)$ з віссю ординат ($\lg M^*$). Результат занести до табл. 2. Величину σ , отриману в такий спосіб, порівняти із середнім значенням $\langle \sigma \rangle$.



Запитання та завдання для самоперевірки

1. Яке випромінювання називають тепловим? У чому полягає його особливість?
2. Яке тіло називають абсолютно чорним? Який пристрій моделює абсолютно чорне тіло?
3. Що називають енергетичною світністю, випромінювальною та поглинальною здатністю тіла? Що таке універсальна функція Кірхгофа?
4. Які експериментальні закони теплового випромінювання абсолютно чорного тіла ви знаєте?

5. Зобразіть залежність випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від температури. Як вона змінюється зі зміною температури?
6. Запишіть формулу Релея–Джинса та поясніть суть «ультрафіолетової катастрофи».
7. Запишіть формулу Планка та поясніть, за якої умови вона переходить у формулу Релея–Джинса.
8. Як графічно можна перевірити закон Стефана–Больцмана?



Лабораторна робота 2

ЗОВНІШНІЙ ФОТОЕФЕКТ. ВИЗНАЧЕННЯ СТАЛОЇ ПЛАНКА МЕТОДОМ ЗАТРИМУВАЛЬНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

Мета роботи: вивчити закони фотоелектричного ефекту, виміряти величину затримувального потенціалу за різних частот світла, що падає на фотокатод; визначити роботу виходу електрона і червону межу фотоелектричного ефекту для досліджуваного фотокатода. За отриманими експериментальними даними встановити величину сталої Планка.

Прилади та обладнання: оптична лавка, вакуумний фотоелемент типу СЦВ-4, амперметр, джерело світла зі змінними світлофільтрами, батарея постійного струму, вольтметр, потенціометр, перемикач.

Теоретичні відомості

Явище випускання електронів речовиною під дією світла називають фотоелектричним ефектом або просто фотоелектричним ефектом, а випущені електрони — фотоелектронами. Розрізняють зовнішній і внутрішній фотоелектричні ефекти. За зовнішнього фотоелектричного ефекту електрони покидають поверхневий шар речовини, переходячи в інше середовище, зокрема у вакуум.

У разі внутрішнього фотоелектричного ефекту відбувається перерозподіл електронів за енергетичними станами, при цьому вони залишаються всередині речовини, не порушуючи її електронейтральності.

Внутрішній фотоэффект спостерігається у твердих і рідких напівпровідниках та діелектриках.

Різновидами внутрішнього фотоэффекту є фотопровідність і вентильний фотоэффект. Фотопровідність полягає у збільшенні електричної провідності речовини при опроміненні її світлом. Вентильний фотоэффект — виникнення електрорушійної сили на межі поділу двох речовин, що контактують (метал — напівпровідник або два напівпровідники), у разі опромінення приконтактної зони.

Уперше для металів дослідним шляхом були встановлені такі закономірності зовнішнього фотоелектричного ефекту:

а) у разі сталої частоти (довжини хвилі) падаючого світла фотострум насичення — кількість фотоелектронів, звільнених світлом за одиницю часу — прямо пропорційний світловому потоку, що падає на катод: $I_n \sim \Phi$;

б) для кожної речовини існує червона межа фотоэффекту, тобто мінімальна частота ν_{\min} (або максимальна довжина хвилі λ_{\max}), нижче від якої $\nu < \nu_{\min}$ ($\lambda > \lambda_{\max}$) фотоэффект не відбувається;

в) електрони залишають поверхню речовини, маючи кінетичну енергію від нуля до $m_e v_{\max}^2 / 2$. Максимальна кінетична енергія лінійно зростає зі збільшенням частоти падаючого випромінювання і не залежить від його інтенсивності: $m_e v_{\max}^2 / 2 \sim h\nu$;

г) проміжок часу між початком опромінення фотокатода та появою фотоструму не перевищує $\tau \sim 10^{-9}$ с.

Спроба пояснити встановлені закономірності за допомогою класичної хвильової електромагнітної теорії світла не мала успіху.

У 1905 р. А. Ейнштейн, розвиваючи ідеї М. Планка, запропонував теорію, яка пояснила всі закономірності фотоелектричного ефекту. Для цього він припустив, що потік світлової енергії не є безперервним, а являє собою потік дискретних порцій енергії — фотонів, енергія яких $\epsilon = h\nu \equiv \hbar\omega$.

Згідно з гіпотезою Ейнштейна в разі поглинання фотона речовиною його енергія повністю передається одному електрону. Отже, «вільний» електрон у металі отримує енергію не поступово, а миттєво. Цим і пояснюється безінерційність фотоэффекту. Якщо

отриманої енергії достатньо для виходу електрона за межі атома, то буде спостерігатися явище фотоелектру.

Відповідно до квантової теорії металів вільні електрони заповнюють дискретний ряд рівнів енергії. За температури $T \rightarrow 0$ К заповненими виявляються всі нижні рівні аж до рівня Фермі E_F . Мінімальну додаткову енергію, достатню для подолання електронем потенціального бар'єра з рівня Фермі без надання йому (електрону) кінетичної енергії, називають роботою виходу $A_{\text{вих}} = E_F$. Величина $A_{\text{вих}}$ залежить від природи металу, властивостей кристалічної ґратки та стану поверхні. У разі опромінення речовини монохроматичним світлом частотою ν фотоелектр ефект відбувається за умови $h\nu \geq A_{\text{вих}}$.

Гранична частота $\nu_{\text{мін}}$, що відповідає червоній межі фотоелектру, визначається з умови $h\nu_{\text{мін}} = A_{\text{вих}}$, звідки

$$\nu_{\text{мін}} = \frac{A_{\text{вих}}}{h} \text{ або } \lambda_{\text{макс}} = \frac{hc}{A_{\text{вих}}}.$$

Найбільшу швидкість $v_{\text{макс}}$ та кінетичну енергію $m_e v_{\text{макс}}^2 / 2$ будуть мати електрони, видалені із верхнього енергетичного рівня в металі. Закон збереження енергії для цих електронів або рівняння Ейнштейна для фотоелектру має вигляд

$$h\nu = A_{\text{вих}} + \frac{m_e v_{\text{макс}}^2}{2}. \quad (1)$$

Квантова теорія фотоелектру дозволяє пояснити всі особливості фотоелектру, зокрема із формули (1) випливає: а) максимальна кінетична енергія (максимальна швидкість) фотоелектронів лінійно залежить від частоти падаючого світла і зовсім не залежить від його інтенсивності ($A_{\text{вих}} = \text{const}$); б) якщо $m_e v_{\text{макс}}^2 / 2 = 0$, то $h\nu_{\text{мін}} = A_{\text{вих}}$ — умова, з якої визначається червона межа фотоелектру $\lambda_{\text{макс}}$; в) зростання потоку (інтенсивності) опромінення означає збільшення кількості фотонів, що падають на речовину і поглинаються нею. Відтак збільшується кількість звільнених фотоелектронів, отже, зростає струм насичення, а це означає, що $I_{\text{н}} \sim \Phi$.

Метод і дослідна установка

У цій лабораторній роботі для вивчення фотоелектричного ефекту застосовується вакуумний сурм'яно-цезієвий фотоелемент (типу СЦВ-4). Він виконаний у вигляді скляного балона, з якого відкачано повітря до тиску 10^{-7} мм рт. ст. На одну половину внутрішньої поверхні балона на шар магнію нанесено тонкий шар сурми, а потім тонкий шар цезію. Сполука Cs_3Sb , що утворюється при цьому, слугує катодом (К). Такий катод має невелике значення роботи виходу, внаслідок чого червона межа фотоелемента даного фотоелемента міститься у видимій частині спектра. У центрі балона розміщено металевий анод (А). Якщо на катод спрямувати пучок світла і створити між анодом і катодом різницю потенціалів, то електрони, що випромінюються катодом, будуть прискорюватись електричним полем і прямуватимуть до анода, унаслідок чого виникає електричний струм — фотострум.

На рис. 1 зображено схему експериментальної установки, де на оптичній лавці співвісно розміщені фотоелемент ФЕ та освітлювач ОС зі змінними світлофільтрами СФ. За допомогою світлофільтрів із білого світла виділяються монохроматичні промені. Між анодом і катодом фотоелемента за допомогою батареї Б і потенціометра R створюється затримувальна напруга, значення якої вимірюється вольтметром V. Ця напруга затримує створений внаслідок фотоелемента струм. Зміна фотоструму в колі реєструється амперметром А.

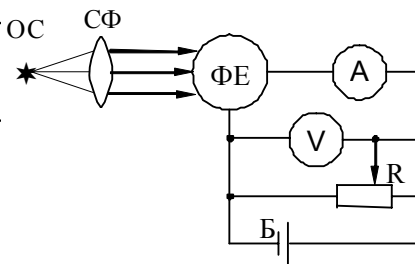


Рис. 1

За допомогою описаної установки можна виміряти силу фотоструму залежно від затримувальної напруги при освітленні фотоелемента світловим потоком виділеного спектрального складу,

а отже, визначити величину затримувального потенціалу U_3 , що відповідає різним довжинам хвиль λ , якщо фотострум $I = 0$.

Із вольт-амперної характеристики вакуумного фотоелемента, отриманої експериментально (рис. 2), видно, що за відсутності електричного поля ($U = 0$) у колі між анодом і катодом протікає струм. Це вказує на те, що певна кількість фотоелектронів мають енергію, достатню щоб долетіти до анода самостійно без допомоги прискорювального поля.

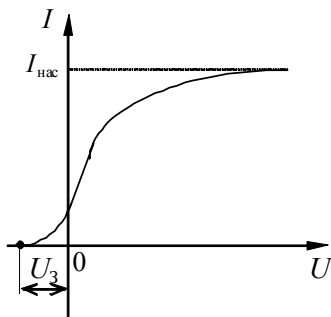


Рис. 2

Для припинення фотоструму необхідно між катодом і анодом створити затримувальне електричне поле з різницею потенціалів $U_3 < 0$. За умови, що робота сил затримувального поля дорівнюватиме максимальній кінетичній енергії фотоелектронів

$$eU_3 = \frac{m_e v_{\max}^2}{2}, \quad (2)$$

жоден з них не долетить до анода, і фотострум у колі зникне.

Рівняння Ейнштейна (1) з урахуванням виразу (2) набуває вигляду:

$$h\nu = A_{\text{вих}} + eU_3,$$

звідки

$$U_3 = \frac{h\nu}{e} - \frac{A_{\text{вих}}}{e}. \quad (3)$$

Із виразу (3) видно, що для певного типу фотокатода величина затримувального потенціалу U_3 залежить лише від частоти світла ν і зростає з її збільшенням.

Вираз (3) є рівнянням прямої типу $y = kx - b$ (рис. 3). Величина h/e дорівнює тангенсу кута нахилу прямої $U_3 = f(\nu)$, а величина $A_{\text{вих}}/e$ — відрізку U_0 на осі U_3 , що відтинається прямою від початку координат.

Точка перетину прямої $U_3 = f(\nu)$ із віссю абсцис визначає граничну частоту фотоелектру $\nu_{\text{min}} = \nu_0$, оскільки для $U_3 = 0$ відповідно до виразу (2) кінетична енергія дорівнює нулю: $m_e v_{\text{max}}^2 / 2 = 0$.

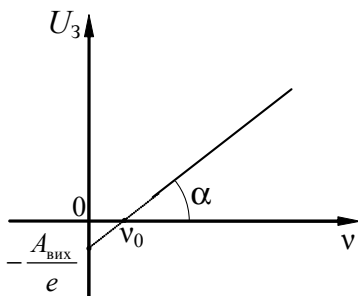


Рис. 3

Подамо рівняння (3) у вигляді

$$U_3 = k\nu - b, \quad (4)$$

де $k = \text{tg}\alpha = \frac{h}{e}$, а $b = \frac{A_{\text{вих}}}{e}$.

Отже, сталу Планка h можна визначити, використовуючи формулу

$$h = e \cdot \text{tg}\alpha, \quad (5)$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд електрона.

Визначивши по перетину з осями координат величини ν_0 та U_0 , можна розрахувати відповідно червону межу фотоелектру $\lambda_{\text{max}} = \lambda_{\text{ч}} = c/\nu_0$ (c — швидкість світла) та роботу виходу для досліджуваного фотокатода $A_{\text{вих}} = eU_0$.

Порядок виконання роботи та опрацювання результатів вимірювань

1. Зібрати (перевірити) схему установки відповідно до рис. 1. Установити світлофільтр і ввімкнути освітлювач.

2. Установити потенціометр R у крайнє (нульове) положення. Увімкнути батарею B і, обертаючи ручку потенціометра, подати на електроди фотоелемента затримувальну напругу $U_3 = 0,05$ В (за вольтметром V). Виміряти фотострум I_ϕ , що відповідає цій напрузі. Потім збільшити затримувальну напругу ще на $0,05$ В і виміряти відповідний I_ϕ , і далі доти, доки показання амперметра, а, отже, і фотоструму, не будуть дорівнювати нулю. Результати вимірювань I_ϕ та U_3 записати до табл. 1 разом із характеристиками світлофільтра (колір, довжина хвилі λ та частота ν). Аналогічні вимірювання виконати для всіх досліджуваних світлофільтрів і занести всі дані до таблиці:

Колір світлофільтра										
$\lambda, \text{Å}$										
$\nu, \text{с}^{-1}$										
	$I_\phi,$ А	$U,$ В	$I_\phi,$ А	$U,$ В	$I_\phi,$ А	$U,$ В	$I_\phi,$ А	$U,$ В	$I_\phi,$ А	$U,$ В
1										
2										
...										
n										

3. За даними таблиці для кожного зі світлофільтрів побудувати вольт-амперні криві.

4. Побудувати графік залежності $U_3 = f(\nu)$, відкладаючи по осі абсцис частоту ν , а по осі ординат — відповідну їй величину затримувального потенціалу U_3 .

5. Визначити граничну частоту фотоелемента ν_0 за точкою перетину графіка з віссю абсцис та U_0 — за точкою перетину графіка з віссю ординат. За отриманими величинами ν_0 та U_0 розрахувати червону межу фотоелемента $\lambda_{\text{ч}}$ та роботу виходу $A_{\text{вих}}$.

6. Користуючись експериментальними даними та формулою (5), визначити сталу Планка h і встановити одиницю її вимірювання (у СІ).

7. Порівняти отриманий результат з теоретичним значенням сталої Планка. Оцінити абсолютну та відносну похибки вимірювань.



Запитання та завдання для самоперевірки

1. Яке явище називають фотоелектричним ефектом? Які різновиди фотоефекту ви знаєте?
2. Сформулюйте основні закономірності зовнішнього фотоефекту.
3. Запишіть рівняння Ейнштейна та покажіть, які закони фотоефекту з нього випливають.
4. Що називають роботою виходу електрона?
5. Що називають затримувальним потенціалом?
6. Що називають червоною межею фотоефекту? Запишіть формулу для граничної частоти (максимальної довжини хвилі).
7. У разі заміни фотокатода на інший червона межа λ_c збільшилась. Що можна сказати про роботу виходу цих двох фотокатодів?
8. Чому максимальна кінетична енергія (або швидкість) фотоелектронів не залежить від інтенсивності падаючого на фотокатод світла?
9. У чому полягає сутність визначення сталої Планка h методом затримувального потенціалу?
10. Укажіть застосування фотоелектричного ефекту в науці та техніці.



Лабораторна робота 3

ВИВЧЕННЯ СПЕКТРА АТОМА ВОДНЮ. ВИЗНАЧЕННЯ СТАЛОЇ РІДБЕРГА

Мета роботи: дослідити видимий спектр атомарного водню; виміряти довжини хвиль видимого спектра атомарного водню; визначити сталу Рідберга.

Прилади та обладнання: спектроскоп-монохроматор УМ-2, газорозрядні трубки з атомарним воднем та інертним газом.

Теоретичні відомості

Спектром називається повний набір частот (або довжин хвиль), що випромінюються або поглинаються речовиною.

Спектри випромінювання, як і спектри поглинання, поділяються на три типи: лінійчасті, смугасті та суцільні. *Лінійчастим* називається спектр випромінювання атомів, що не взаємодіють між собою, тобто це спектр речовини, що перебуває у стані атомарного газу. Такий спектр має вигляд окремих чітких ліній, які відповідають дискретним значенням λ . *Смугастий* спектр випромінюється молекулами речовини (молекулярним газом). Він складається з окремих смуг, кожна з яких охоплює деякий інтервал довжин хвиль. *Суцільний* спектр характерний для випромінювання рідин і твердих тіл, він охоплює широкий діапазон довжин хвиль.

Кожен хімічний елемент характеризується притаманним лише йому лінійчастим спектром. Цей факт покладено в основу спектрального аналізу — методики визначення хімічного складу речовини за спектрами її випромінювання або поглинання.

Експериментальне вивчення випромінювання атомарного водню показало, що лінії в спектрах розміщуються впорядковано, об'єднуючись у групи, що отримали назву спектральних серій. Причому зі збільшенням частоти випромінювання серії стають ширшими, а відстань між лініями в межах однієї серії зменшується.

У результаті узагальнення експериментальних даних для видимого спектра атомарного водню швейцарським фізиком Юганном Бальмером (1885) була отримана формула, що дозволяє обчислити частоти всіх виявлених під час досліду спектральних ліній:

$$\nu = R_v \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots, \quad (1)$$

де R_v — константа, названа на честь шведського вченого *сталою Рідберга* $R_v = 3,28 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$.

Подальші дослідження показали, що в спектрі атомарного водню є ще кілька серій. Усі серії можна записати за допомогою узагальненої формули *Бальмера–Рідберга*:

$$\nu = R_v \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (2)$$

де m і n — цілі числа, причому за певного m число n набуває значення, починаючи з $m + 1$.

Якщо подивитися на спектр атома водню (рис. 1), то в ультрафіолетовій його частині міститься *серія Лаймана* ($m = 1, n = 2, 3, 4, \dots$), видима область відповідає *серії Бальмера* ($m = 2, n = 3, 4, 5, \dots$), інфрачервона починається із *серії Пашена* ($m = 3, n = 4, 5, 6, \dots$), за якою лежать *серії Брекета* ($m = 4, n = 5, 6, 7, \dots$) та *Пфунда* ($m = 5, n = 6, 7, 8, \dots$). Межа кожної серії утворюється за умови $n \rightarrow \infty$.

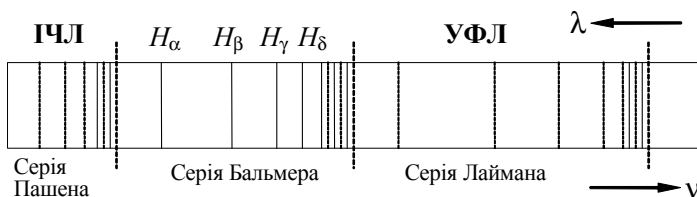


Рис. 1

Спроби теоретично вивести формулу Бальмера–Рідберга, виходячи із законів класичної фізики, не мали успіху.

Теоретично закономірності спектра атома водню вперше пояснив датський фізик Нільс Бор (1913), він же теоретично визначив сталу Рідберга R . Теорія атома водню ґрунтується на постулатах Бора:

1. Електрон в атомі може перебувати лише на визначених дискретних орбітах, які називають стаціонарними. Рухаючись по стаціонарних орбітах з доцентровим прискоренням, електрон всупереч класичній електродинаміці не випромінює енергію.

2. Випромінювання (або поглинання) відбувається в разі переходу з однієї стаціонарної орбіти на іншу. При цьому випромінюється або поглинається один квант енергії:

$$h\nu = E_n - E_m, \quad (3)$$

де ν — частота випромінювання (або поглинання); E_n і E_m — енергії електрона відповідно на n -й і m -й орбітах.

3. З усіх можливих орбіт в атомі можуть існувати лише ті, для яких момент імпульсу електрона є кратним \hbar — умова квантування орбіт:

$$L = m_e v r = n \hbar, \quad (4)$$

де m_e — маса електрона; v — швидкість електрона; r — радіус орбіти; \hbar — стала Планка; n — номер орбіти.

В атомі водню рух електрона по коловій стаціонарній орбіті радіуса r відбувається за рахунок дії кулонівської сили, зумовленої взаємодією електрона з ядром (протоном), яка надає електрону доцентрового прискорення. Рівняння руху таке: $F_{\text{кул}} = F_{\text{доц}}$, або

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (\text{у CI}). \quad (5)$$

Із виразу (4) випливає співвідношення $v = \frac{n\hbar}{mr}$, підставлення якого у формулу (5) показує, що радіуси електронних орбіт в атомі можуть набувати лише дискретних значень:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{e^2 m_e}. \quad (6)$$

Розрахований за формулою (6) радіус першої орбіти атома водню ($n = 1$) дорівнює $r_1 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см = 0,529 Å. Оцінні розміри атома (його діаметра) ~ 1 Å, отже, теорія Бора дає правильні значення розмірів атомів.

Повна енергія електрона в атомі водню складається з кінетичної енергії $W_k = mv^2/2$ руху електрона по орбіті та потенціальної енергії $W_n = -e^2/4\pi\epsilon_0 r$, зумовленої взаємодією електрона з ядром (останню можна подати у вигляді $W_n = -eU$, де $U = e/4\pi\epsilon_0 r$ — потенціал, що створює ядро в місці перебування електрона):

$$E = W_k + W_n = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

Із формули (5) випливає $m_e v^2/2 = e^2/8\pi\epsilon_0 r$, тоді вираз для повної енергії набуває вигляду

$$E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (8)$$

Підставивши значення радіуса орбіти r_n із формули (6) у вираз (8), дістанемо дозволених значення повної енергії атома водню:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (9)$$

Із формули (9) видно, що енергія атома водню набуває лише від'ємних дискретних значень. Число $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ називають *головним квантовим числом*. За умови $n = \infty$ енергія прямує до нуля $E_n = 0$. Це відповідає мінімальній енергії іонізації атома: $E_{\text{іон}} = E_\infty - E_n = -E_n$. Слово *мінімальна* підкреслює той факт, що видалений електрон має нульову кінетичну енергію. Мінімальна енергія іонізації основного стану ($n=1$) дорівнює $E_{\text{іон}} = -E_1 = 13,6 \text{ eV}$, і ця ж величина також є енергією зв'язку електрона з ядром в основному стані $E_{\text{зв}} = E_{\text{іон}}$.

Запишемо другий постулат Бора (3) у вигляді

$$\hbar\omega = \hbar 2\pi\nu = E_n - E_m,$$

звідки знаходимо частоту ν , підставивши відповідні значення енергій на n -й та m -й орбітах:

$$\nu = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (10)$$

Формула (10) збігається з емпіричною формулою Бальмера–Рідберга (2), якщо вважати, що множник перед дужками дорівнює сталій Рідберга:

$$R_\nu = \frac{m_e e^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3}. \quad (11)$$

Підставивши у формулу (11) значення відповідних констант, дістанемо для R_ν величину $R_\nu = 3,28 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$, яка добре збігається з експериментально виміряною. Якщо у формулі (11) замінити частоту ν на циклічну частоту $\omega = 2\pi\nu$, то стала Рідберга $R_\omega = 2\pi R_\nu = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$.

Формулу Бальмера–Рідберга можна записати також через обернені довжини хвиль, а саме:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R_V}{c} \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_{1/\lambda} \cdot \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (12)$$

де множник $R_{1/\lambda} = R_V / c = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ — стала Рідберга, визначена в обернених метрах.

Розрахунок за формулою (12) свідчить, що у видимій частині спектра (серія Бальмера, див. рис. 1) атом водню має чотири спектральні лінії з довжинами хвиль: $\lambda_\alpha = 6562,79 \text{ \AA}$ (червона лінія); $\lambda_\beta = 4881,33 \text{ \AA}$ (блакитна лінія); $\lambda_\gamma = 4346,47 \text{ \AA}$ (синя лінія); $\lambda_\delta = 4101,74 \text{ \AA}$ (фіолетова лінія). Утворення спектральних серій атома водню схематично зображено на рис. 2.

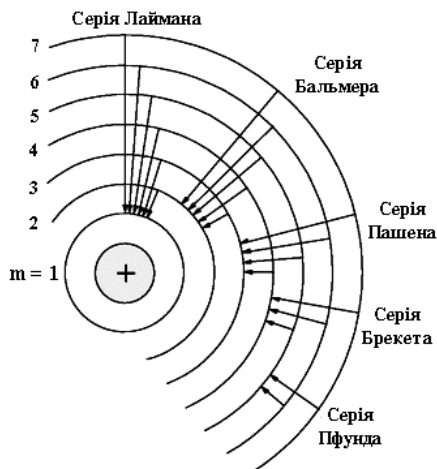


Рис. 2

Борівська теорія, пояснивши спектр атома водню, не змогла пояснити навіть спектри атома гелію — найпростішого після водню атома. Теорія Бора була дуже важливим, але лише перехідним етапом (так вважав і сам Бор) від класичної фізики до квантової.

За сучасною квантово-механічною теорією положення електрона в атомі правильно описує хвильове рівняння Шредінгера для стаціонарних станів:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (13)$$

де E — повна енергія електрона, яка для випадку стаціонарних полів залишається сталою; U — потенціальна енергія електрона, зумовлена характером сил, що діють на частинку; m — маса електрона; $\psi = \psi(x, y, z)$ — хвильова функція; $\nabla^2 = \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ — оператор Лапласа.

Хвильова функція ψ у рівнянні Шредінгера має статистичний зміст: квадрат її модуля визначає ймовірність перебування електрона в атомі у місці з координатами x, y, z .

Метод та дослідна установка

Для дослідження спектра атома водню використовується спектроскоп-монохроматор типу УМ-2. Хід променів у спектроскопі зображено на рис. 3.



Рис. 3

Призма розкладає у спектр падаючий на неї після проходження коліматора з об'єктивом Об₁ паралельний пучок білого (немонохроматичного) світла.

Кут відхилення променів залежить від їх довжини, тому з призми виходять вже монохроматичні хвилі (червоні, помаранчеві, жовті, зелені, блакитні, сині, фіолетові) під різними кутами.

Зорова труба збирає пучки монохроматичних променів у фокальній площині об'єктива Об₂.

Окуляр Ок дозволяє спостерігати спектр візуально.

Повертаючи за допомогою барабана призмовий столик на різні кути відносно падаючого пучка, виділяють у фокальній площині об'єктива зорової труби світло визначеної довжини хвилі (кольору) для кожного фіксованого положення барабана. Графік, що пов'язує довжини хвиль та відповідні поділки барабана, називають *градуйованою кривою*. Маючи градуйовану криву певного спектроскопа для відомого спектра та визначивши поділки барабана для ліній невідомого спектра, із графіка встановлюють довжини хвиль цих (невідомих) ліній.

Сталу Рідберга визначають за формулою

$$R_v = \frac{c}{\lambda \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)}, \quad (14)$$

підставивши в неї отримані значення довжин хвиль атома водню та відповідні їм значення n та m .

Порядок виконання роботи та опрацювання результатів вимірювань

1. Увімкнути в мережу генератор із газорозрядною трубкою, наповненою газом (криптоном, неонем або гелієм), спектр випромінювання якого відомий.

2. Спостерігаючи спектр в окуляр монохроматора, установити генератор перед щілиною монохроматора так, щоб спектральні лінії були чіткими.

3. Повернути барабан монохроматора так, щоб курсор в окулярі збігався із серединою першої спектральної лінії (червоної) і записати відповідну їй поділку на барабані. Такі самі вимірювання виконати для всіх ліній видимого спектра. Дані занести до табл. 1.

Таблиця 1

Колір спектральної лінії	Таблична довжина хвилі λ , Å	Поділки барабана

4. Побудувати градуйований графік, відкладаючи по осі абсцис довжини хвиль, по осі ординат — поділки барабана.

5. Замінити газорозрядну трубку в генераторі на трубку з воднем і спостерігати в окуляр спектр водню.

6. Записати показники барабана монохроматора, що відповідають положенням ліній H_α , H_β , H_γ , H_δ для спектра водню.

Дані занести до табл. 2.

Таблиця 2

Позначення ліній	Колір спектральної лінії	Поділлка барабана	Довжина хвилі λ , Å		Стала Рідберга R_v , с^{-1}
			графік	таблична	
H_α	Червоний ($n = 3$)				
H_β	Блакитний ($n = 4$)				
H_γ	Синій ($n = 5$)				
H_δ	Фіолетовий ($n = 6$)				

7. Визначити за градуйованим графіком довжини хвиль ліній H_α , H_β , H_γ , H_δ і занести до табл. 2.

8. Використовуючи дані табл. 2, обчислити сталу Рідберга R_v за формулою (14) для всіх спектральних ліній серії Бальмера, що спостерігаються.

9. Знайти середнє значення сталої Рідберга $\langle R \rangle$. Обчислити

$$\text{абсолютну } \Delta R = t_C \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta R_i^2)}{n(n-1)}} \quad \text{і відносну } \varepsilon_R = \frac{\Delta R}{\langle R \rangle} \cdot 100 \% \text{ похибки}$$

вимірювання R , користуючись методом розрахунку похибок для прямих вимірювань.

10. Порівняти теоретичне значення сталої Рідберга з вимірним.



Запитання та завдання для самоперевірки

1. Що називають спектром випромінювання? Які типи спектрів ви знаєте?
2. Сформулюйте постулати Бора.
3. У чому полягає зміст квантування орбіт та дискретності енергії?
4. Поясніть утворення спектральних ліній та спектральних серій в атомі водню, базуючись на теорії Бора.
5. Виведіть формулу Бальмера–Рідберга.
6. У яких одиницях вимірюють сталу Рідберга? Який існує зв'язок між цими одиницями?
7. Що називають енергією іонізації атома?
8. Який фізичний зміст має хвильова функція?
9. Запишіть рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.
10. Як визначити спектр атома водню за відомим спектром іншого газу?

Навчальний елемент 7

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ



7.1. Порядок виконання індивідуального домашнього завдання

Індивідуальне домашнє завдання виконується в окремому зошиті або на аркушах паперу формату А4.

Термін здачі індивідуального домашнього завдання визначає викладач. Варіанти індивідуального домашнього завдання, що відповідають номеру студента у списку навчальної групи, наведено в таблиці.

Перед тим, як виконувати домашнє завдання, студент повинен вивчити відповідний лекційний матеріал, розібрати задачі, розв'язані до теми заняття, відповісти на питання, поставлені до цієї теми.

Вимоги до оформлення індивідуального домашнього завдання:

– на титульному аркуші написати «Індивідуальне домашнє завдання з фізики», номер варіанта, групу та прізвище, ім'я, по батькові;

– зазначити номер задачі та навести її повну умову;

– розв'язання у загальному вигляді супроводжувати лаконічними поясненнями, рисунками, указуючи використані закони; перевірити одиниці вимірювання фізичних величин;

– обчислення виконувати наближено згідно з правилами округлення;

– відповідь задачі навести в розгорнутому вигляді.

7.2. Варіанти індивідуального домашнього завдання

Номер варіанта	Номер задачі домашньої роботи				
1	1.1	1.33	2.1	3.23	4.17
2	1.2	1.55	2.13	3.12	4.15
3	1.3	1.41	2.2	3.16	5.11
4	1.4	1.49	2.20	3.13	4.7
5	1.5	1.35	2.3	3.20	5.10
6	1.6	1.57	2.5	3.11	4.14
7	1.7	1.42	2.4	3.5	5.9
8	1.8	1.60	2.14	3.10	4.6
9	1.9	1.46	2.5	3.17	5.8
10	1.10	1.31	2.3	3.18	4.13
11	1.11	1.54	2.6	3.9	5.7
12	1.12	1.50	2.15	3.1	4.5
13	1.13	1.37	2.19	3.18	5.6
14	1.14	1.58	2.7	3.3	4.12
15	1.15	1.45	2.15	3.8	5.5
16	1.16	1.32	2.8	3.7	4.4
17	1.17	1.56	2.16	3.19	5.4
18	1.18	1.40	2.17	3.6	4.11
19	1.19	1.51	2.19	3.2	5.3
20	1.20	1.43	2.9	3.17	4.3
21	1.21	1.38	2.11	3.5	5.2
22	1.22	1.53	2.17	3.21	4.10
23	1.23	1.47	2.10	3.14	5.1
24	1.24	1.52	2.1	3.4	4.2
25	1.25	1.34	2.6	3.20	4.18
26	1.26	1.59	2.11	3.3	4.9
27	1.27	1.44	2.18	3.22	4.17
28	1.28	1.36	2.8	3.2	4.1
29	1.29	1.48	2.12	3.15	4.16
30	1.30	1.39	2.4	3.1	4.8

7.3. Задачі для індивідуального домашнього завдання**Теплове випромінювання**

1.1. Земля випромінює енергію $90,8 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. За якої температури абсолютно чорне тіло випромінювало б таку саму енергію? (200 K)

1.2. Яку енергетичну світність має свинець, що твердіє? Відношення енергетичних світностей свинцю та абсолютно чорного тіла за температури твердіння свинцю становить 0,6. ($4,6 \text{ кВт}/\text{м}^2$)

1.3. Яка температура печі, якщо з її віконця площею 8 см^2 щосекунди випромінюється 20 Дж енергії? (815 K)

1.4. На скільки зменшиться маса Сонця за рік унаслідок випромінювання? За який час маса Сонця зменшиться вдвічі? Температура поверхні Сонця 5800 K . Вважати випромінювання Сонця сталим і близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла. ($1,4 \cdot 10^{17} \text{ кг}$, $7 \cdot 10^{12}$ років)

1.5. Знайдіть довжину хвилі, що відповідає максимуму випромінювальної здатності лампи розжарювання, якщо площа поверхні нитки розжарювання $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, а потужність, яку споживає лампа, 25 Вт . Нитку лампи вважати сірим тілом з коефіцієнтом поглинання 0,3. Крім цього, 20 % спожитої енергії передається іншим тілам унаслідок теплопровідності. (1,1 мкм)

1.6. Поверхня тіла нагріта до температури 1000 K . Після цього дві третини поверхні нагрівається на 100 K , а одна третина охолоджується на 100 K . У скільки разів зміниться енергетична світність поверхні цього тіла? (збільшиться в 1,2 разу)

1.7. Максимум випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла припадає на довжину хвилі $\lambda = 2,5 \text{ мкм}$. У разі підвищення температури максимум змістився на $\Delta\lambda = 1,5 \text{ мкм}$. У скільки разів змінилась температура та інтегральна енергетична світність тіла? (2,5; 39)

1.8. Чорна кулька охолоджується від температури 300 K до 293 K . На скільки змінилась довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини його енергетичної світності? (0,24 мкм)

1.9. У скільки разів змінилась енергетична світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум випромінювальної здатності спочат-

ку припадав на довжину хвилі 0,7 мкм, а з підвищенням температури – на довжину хвилі 0,5 мкм? (3,84)

1.10. Яку потужність потрібно надавати чорній металевій кульці радіусом 2 см, щоб підтримувати її температуру на $\Delta T = 27 \text{ K}$ вище від температури навколишнього середовища? Вважати, що тепло розсіюється тільки внаслідок випромінювання, а температура навколишнього середовища 293 K (3 Вт)

1.11. У спектрі Сонця максимум спектральної густини енергетичної світності припадає на довжину хвилі 0,48 мкм. Вважаючи, що Сонце випромінює як абсолютно чорне тіло, знайти інтенсивність радіації, тобто середню густину потоку сонячної енергії поблизу Землі за межами її атмосфери. (1,6 кВт/м²)

1.12. Діаметр вольфрамової спіралі електричної лампи складає 0,3 мм, довжина спіралі 5 см. Після увімкнення лампи в мережу 127 В через неї протікає струм 0,31 А. Знайти температуру спіралі. Вважати, що після встановлення рівноваги все тепло, що виділяється, перетворюється у випромінювання. Відношення енергетичних світностей вольфраму і абсолютно чорного тіла за температури спіралі становить 0,31. (2208 K)

1.13. Визначити потужність випромінювання розжареної вольфрамової нитки з температурою 2000 K в інтервалі довжин хвиль, що відрізняються від максимальної на 1 %. Площа поверхні нитки $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, коефіцієнт поглинання вольфраму 0,26 за температури 2000 K. (43,5 мВт)

1.14. Абсолютно чорне тіло має температуру 2900 K. Після його охолодження довжина хвилі, на яку припадає максимум спектральної густини енергетичної світності, змінилося на $\Delta \lambda = 9 \text{ мкм}$. До якої температури охолонуло тіло? (290 K)

1.15. Залізну кулю діаметром 10 см нагріли до температури 1700 K. Якою буде температура кулі через 2 с охолодження? Вважати кулю абсолютно чорним тілом. (1694 K)

1.16. Температура «блакитної» зірки 30000 K. Визначити енергетичну світність випромінювання, довжину хвилі, що відповідає максимуму випромінювання, а також енергетичну світність, що припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta \lambda = 1 \text{ нм}$ у максимумі спектральної густини енергетичної світності. (4,59·10¹⁰ Вт/м²; 96 нм; 3,16·10⁸ Вт/м²)

1.17. У скільки разів потрібно збільшити температуру тіла, щоб його випромінювальна здатність зросла вдвічі? (у 1,19 разу)

1.18. Визначити температуру абсолютно чорного тіла, за якої максимум спектральної густини його випромінювальної здатності припадає на червону межу видимого спектра 750 нм; на фіолетову межу 380 нм. (3,8 кК; 7,6 кК)

1.19. Світловий еталон являє собою повний випромінювач — абсолютно чорне тіло, що випромінює хвилі всіх довжин за температури кристалізації платини 1774°C і має площу поверхні 0,5305 мм². Визначити потужність такого випромінювача. (0,53 Вт)

1.20. Максимальна спектральна густина випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла дорівнює $4,16 \cdot 10^{11}$ Вт/м³. На яку довжину хвилі вона припадає? (1,45 мкм)

Фотоефект

1.21. Визначити найбільшу довжину хвилі, за якої ще може відбуватися фотоефект для калію, натрію, платини, цинку. (620 нм; 540 нм; 234 нм; 332 нм)

1.22. Знайти максимальні швидкості фотоелектронів, що видалені з поверхні натрію, цинку і платини випромінюванням з довжиною хвилі 190 нм. Чому ці швидкості різні? ($1,2 \cdot 10^6$; 10^6 ; $0,66 \cdot 10^6$ м/с)

1.23. Довжина хвилі, що відповідає червоній межі фотоефекту для деякого металу, 196 нм. Знайти мінімальну енергію фотона, що викликає фотоефект. (6,3 еВ)

1.24. Кінетична енергія фотоелектронів, вилітаючих з металу, становить 500 еВ. Яка довжина хвилі світла, що опромінює метал? Роботою виходу знехтувати. Якою буде відносна похибка у розрахунках, якщо метал має роботу виходу 4,5 еВ? (2,47 нм; 0,9 %)

1.25. Визначити максимальну кінетичну енергію фотоелектронів, що утворюються під час опромінення речовини світлом з довжиною хвилі 100 нм. Порівняти її із середньою енергією теплового руху електронів за температури 27°C. ($9,76 \cdot 10^{-19}$ Дж; $6,21 \cdot 10^{-21}$ Дж)

1.26. Червона межа фотоелекту для деякого металу становить $\nu = 10^{15} \text{ c}^{-1}$. Метал опромінюється монохроматичним світлом. Затримувальна різниця потенціалів 2 В. Знайти роботу виходу електронів з металу та частоту світла, що опромінює метал. (4,1 eВ; $1,5 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$)

1.27. Для припинення фотоелекту, викликаного опроміненням ультрафіолетовим світлом платинової пластинки, потрібно прикласти різницю потенціалів 3,7 В. Якщо ж платинову пластинку замінити іншою, то затримувальна різниця потенціалів зросте до 6 В. Визначити енергію виходу електронів з поверхні цієї пластинки. (3 eВ)

1.28. Скільки відсотків енергії фотона витрачається на роботу виходу електрона, якщо червона межа фотоелекту 628 нм, а кінетична енергія фотоелектрона 1 eВ? (66,3 %)

1.29. На цинкову пластинку падає монохроматичне світло з довжиною хвилі 220 нм. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів. (818 км/с)

1.30. Знайти затримувальну різницю потенціалів для фотоелектронів, що вириваються з поверхні калію при освітленні його світлом з довжиною хвилі 330 нм. (1,75 В)

1.31. Відокремлену цинкову кульку опромінюють монохроматичним світлом з довжиною хвилі 4 нм. До якого потенціалу зарядиться кулька? Робота виходу цинку 3,74 eВ. (306,8 В)

1.32. Під час фотоелекту з платинової поверхні електрони повністю затримуються різницею потенціалів 0,8 В. Знайти довжину хвилі застосованого випромінювання та граничну довжину хвилі, за якої ще можливий фотоелект. (204 нм; 234 нм)

1.33. Визначити довжину хвилі ультрафіолетового випромінювання, що падає на поверхню деякого металу, якщо максимальна швидкість фотоелектронів 10 Мм/с. Роботою виходу знехтувати. (4,36 нм)

1.34. Знайти частоту світла, що видаляє з металу електрони, які повністю затримуються різницею потенціалів 3В. Фотоелект починається за частоти світла $6 \cdot 10^{14}$ Гц. Знайти роботу виходу електронів з металу. (2,48 eВ; $13,2 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$)

1.35. Визначити сталу Планка та роботу виходу електронів, якщо відомо, що електрони, які вириваються світлом з довжиною

хвилі 136 нм, повністю затримуються різницею потенціалів 6,6 В, а ті, що вириваються світлом з довжиною хвилі 65,2 нм — різницею потенціалів 16,5 В. (2,5 eВ)

1.36. Фотони з енергією 4,9 eВ виривають електрони з металу, що має роботу виходу 4,5 eВ. Знайти максимальний імпульс, який передається поверхні металу під час вильоту кожного електрона. ($3,45 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с)

1.37. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів, що вилітають з металу в разі опромінення його γ -фотонами з енергією 1,53 MeВ. (291 Мм/с)

1.38. Мікрочастинка вольфраму під дією фотона з довжиною хвилі 200 нм випромінює фотоелектрон під прямим кутом до падаючого фотона. Визначити імпульс, переданий частинці внаслідок поглинання фотона, якщо відомо, що швидкість фотоелектрона становить 0,5 % від максимально можливої. ($4,8 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с)

1.39. Червона межа фотоефекту для рубідію 0,81 мкм. Яку затримувальну напругу потрібно прикласти до фотоелемента, щоб затримати електрони, які вириваються з рубідію ультрафіолетовими променями з довжиною хвилі 0,1 мкм? (10,8 В)

1.40. Рентгенівська трубка працює під напругою 60 кВ. Визначити максимальну енергію фотона рентгенівського випромінювання, мінімальну довжину хвилі рентгенівського випромінювання, імпульс випромінюваного фотона. ($6 \cdot 10^4$ eВ; $2,1 \cdot 10^{-11}$ м; $3,2 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с)

Фотони. Тиск світла. Ефект Комптона

1.41. Імпульсний лазер генерує світло з довжиною хвилі 0,6943 мкм. За один імпульс він випромінює енергію 2 Дж. Визначити енергію, масу та імпульс фотона, а також їх кількість в одному імпульсі. (1,8 eВ; $3,2 \cdot 10^{-34}$ кг; $9,6 \cdot 10^{-28}$ кг·м/с; $7 \cdot 10^{18}$)

1.42. Знайти масу, енергію та імпульс фотона, якщо його довжина хвилі становить 1,6 пм. ($1,38 \cdot 10^{-30}$ кг; $1,15 \cdot 10^{-13}$ Дж; $4,1 \cdot 10^{-22}$ кг·м/с)

1.43. З якою швидкістю повинен летіти електрон, щоб а) його кінетична енергія дорівнювала енергії фотона зеленого світла (0,555 мкм); б) його імпульс дорівнював імпульсу фотона з тією ж довжиною хвилі? ($8,9 \cdot 10^5$ м/с; $1,3 \cdot 10^3$ м/с)

1.44. Яку енергію повинен мати фотон, щоб його маса дорівнювала масі спокою електрона? (0,51 MeV)

1.45. Око людини найбільш чутливе до зеленого світла (0,555 мкм), для якого поріг чутливості ока становить 80 фотонів на сітківку за 1 с. Яка потужність цього порога? ($2,86 \cdot 10^{-17}$ Вт)

1.46. Імпульс, який переносить монохроматичний пучок фотонів через площу 2 см^2 за 0,5 хв дорівнює $3 \cdot 10^{-9}$ кг·м/с. Знайти енергію, що падає на одиницю площі за одиницю часу. ($150 \text{ Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$)

1.47. За якої температури кінетична енергія молекули двохатомного газу буде дорівнювати енергії фотона з довжиною хвилі 589 нм? (9800 K)

1.48. За якої температури атом гелію матиме кінетичну енергію, достатню для того, щоб ударом збудити атом іншого хімічного елемента, який випромінює фотони з довжиною хвилі 0,63 мкм? Якою є середня квадратична швидкість атома гелію за цієї температури? ($1,52 \cdot 10^4$ K; 9700 м/с)

1.49. Знайти масу фотона, імпульс якого дорівнює імпульсу молекули водню за температури 20°C . Вважати швидкість молекули такою, що дорівнює її середній квадратичній швидкості. ($2,1 \cdot 10^{-32}$ кг)

1.50. Монохроматичне світло ($\lambda = 0,662$ мкм) падає за нормаллю на поверхню з коефіцієнтом відбивання 0,80. Визначити кількість фотонів, які щосекунди поглинаються 1 см^2 поверхні, якщо тиск світла становить 1,00 мкПа. ($1,0 \cdot 10^{16}$)

1.51. Гіпотеза, що світло тисне на освітлювані поверхні, була вперше висловлена Іоганном Кепплером (1619) для пояснення відхилення хвостів комет, пролітаючих поблизу Сонця. Визначити тиск сонячного світла на абсолютно чорне тіло, яке перебуває на такій відстані, що і Земля від Сонця. Яку масу повинна мати частинка в хвості комети на цій відстані, щоб сила тиску світла на неї зрівноважувалась силою притягання цієї частинки до Сонця? Площа відбивання частинки становить $0,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$, а сонячна стала —

середня густина потоку сонячної енергії, що падає на верхню межу земної атмосфери, — $1,33 \text{ кВт/м}^2$. ($4,4 \text{ мкПа}$; $7,5 \cdot 10^{-16} \text{ кг}$)

1.52. Паралельний пучок світла інтенсивністю $0,2 \text{ Вт/см}^2$ падає під кутом 60° на плоске дзеркало з коефіцієнтом відбивання $0,9$. Визначити тиск світла на дзеркало. ($3,2 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$)

1.53. Знайти тиск світла на стінки 100 -ватної електричної лампи. Колбу лампи вважати сферичною посудиною радіусом 5 см . Стінки лампи відбивають 4% і пропускають 6% світла, яке на них падає. Вважати, що вся споживана потужність витрачається на випромінювання. ($10,4 \text{ мкПа}$)

1.54. Фотон рентгенівського випромінювання з енергією $0,15 \text{ МеВ}$ розсіявся на вільному електроні, що перебуває у стані спокою. Унаслідок цього довжина хвилі фотона збільшилась на $0,015 \text{ \AA}$. Знайти кут, під яким вилетів комптонівський електрон віддачі. (49°)

1.55. Рентгенівські промені з довжиною хвилі $70,8 \text{ пм}$ зазнають комптонівського розсіяння на парафіні. Знайти довжину рентгенівських променів, розсіяних під кутами $\pi/2$ та π радіанів. ($73,22 \text{ пм}$; $75,6 \text{ пм}$)

1.56. Фотон з енергією $0,4 \text{ МеВ}$ розсіявся під кутом 90° на вільному електроні. Визначити енергію фотона, що зазнав розсіяння, та кінетичну енергію електрона віддачі. ($0,224 \text{ МеВ}$; $0,176 \text{ МеВ}$)

1.57. Визначити імпульс електрона віддачі в ефекті Комптона, якщо фотон з енергією, що дорівнює енергії спокою електрона, був розсіяний під кутом 180° . ($3,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг}\cdot\text{м/с}$)

1.58. Енергія рентгенівських променів $0,6 \text{ МеВ}$. Знайти енергію електрона віддачі, якщо довжина хвилі рентгенівських променів після комптонівського розсіяння змінилась на 20% . ($0,1 \text{ МеВ}$)

1.59. Яка частина енергії фотона в ефекті Комптона припадає на електрон віддачі, якщо кут розсіяння фотона складає 180° ? Енергія фотона до розсіяння $0,255 \text{ МеВ}$. ($0,5$)

1.60. Фотон з енергією $0,25 \text{ МеВ}$ розсіявся на вільному електроні, після чого його енергія стала дорівнювати $0,2 \text{ МеВ}$. Визначити кут розсіяння. ($60^\circ 40'$ або $229^\circ 20'$)

*Формула Резерфорда. Атомні спектри.
Борівська модель атома*

2.1. Розрахувати радіуси другої і третьої орбіт в атомі водню (212 пм; 477 пм)

2.2. Спектр космічного об'єкта воднеподібний, при цьому довжини хвиль удев'ятеро коротші, ніж у атомарного водню. Визначити елемент, якому належить цей спектр. ($Z = 3$)

2.3. Визначити частоту обертання електрона на другій орбіті атома водню. ($8.19 \cdot 10^{14} \text{ c}^{-1}$)

2.4. Визначити потенціальну, кінетичну та повну енергії електрона, що перебуває на першій орбіті атома водню. ($-27,2 \text{ eV}$; $13,6 \text{ eV}$; $-13,6 \text{ eV}$)

2.5. Яку найменшу енергію повинні мати електрони, щоб при збудженні атомів водню ударами цих електронів з'явилися всі лінії спектра водню? Яку найменшу швидкість повинні мати ці електрони? ($13,6 \text{ eV}$; $2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$)

2.6. Розрахувати квантове число n , яке відповідає збудженому стану іона гелію (He^+), якщо відомо, що при переході в нормальний стан цим іоном були випромінені два фотони з довжинами хвиль 108,5 і 30,4 нм? (5)

2.7. Розрахувати для атомарного водню довжини хвиль перших трьох ліній в серії Бальмера. Якою має бути мінімальна роздільна здатність спектрального приладу ($\lambda / \delta \lambda$), за якої можна розрізнити перші 20 ліній цієї серії? (657 нм; 487 нм; 434 нм; $1,5 \cdot 10^3$)

2.8. На скільки змінилась кінетична енергія електрона в атомі водню при випроміненні ним фотона з довжиною хвилі 486 нм? (2,56 eV)

2.9. Між якими енергетичними рівнями відбувається перехід електрона в іоні гелію, якщо довжина хвилі фотона в цьому переході дорівнює довжині хвилі першої лінії серії Бальмера для атома водню? (4 і 6)

2.10. Визначити найменшу і найбільшу енергії фотона в ультрафіолетовій серії спектра атомарного водню (серії Лаймана). (10,2 eV; 13,6 eV)

2.11. Перші потенціали збудження Li і Na дорівнюють відповідно 1,84 та 2,1 В. За якої температури середня кінетична

енергія частинок цих речовин дорівнює енергії збудження?
($1,43 \cdot 10^4 \text{ K}$; $1,63 \cdot 10^4 \text{ K}$)

2.12. Атомарний водень, збуджений світлом певної довжини хвилі, при переході в основний стан випромінює лише три спектральні лінії. Визначити довжини хвиль цих ліній і вказати, яким серіям вони належать. (121,6 нм і 102,6 нм — серія Лаймана; 656,3 нм — серія Бальмера).

2.13. На дифракційну ґратку за нормаллю падає пучок світла від газорозрядної трубки, заповненої атомарним воднем. Стала дифракційної ґратки 5 мкм. Якому переходу електрона відповідає спектральна лінія, яка спостерігається за допомогою ґратки у спектрі п'ятого порядку під кутом 41° ? (з третього на другий)

2.14. Фотон з енергією 16,5 еВ вибив електрон з незбудженого атома водню. Яку швидкість матиме електрон за межами ядра атома? (1 Мм/с)

2.15. У яких межах повинні лежати довжини хвиль монохроматичного світла, щоб у разі збудження атомів водню квантами цього світла радіус орбіти електрона збільшився у 9 разів? (від 97,3 до 102,6 нм)

2.16. Визначити довжину хвилі, яку випромінюють іони гелію He^+ і літію Li^{++} в разі переходу з другого енергетичного рівня на перший. (30,3 нм; 13,5 нм)

2.17. Знайти різницю довжин хвиль перших ліній серії Бальмера для атома водню та гелію. (0,267 нм)

2.18. Визначити енергію і потенціал іонізації іонів He^+ і Li^{++} . (54 еВ; 54 В; 122 еВ; 122 В)

2.19. Атом водню в основному стані поглинув квант світла з довжиною хвилі 121,5 нм. Визначити радіус електронної орбіти збудженого атома. (212 пм)

2.20. У якого воднеподібного іона різниця довжин хвиль між головними лініями серій Бальмера і Лаймана складає 59,3 нм? ($Z = 3$, Li^{++})

*Досліди Девіссона–Джермера. Принцип невизначеності.
Рівняння Шредінгера. Частинка в потенціальній ямі.
Квантовий гармонічний осцилятор*

3.1. Вузький пучок електронів з кінетичною енергією $W = 10$ кеВ проходить крізь полікристалічну алюмінієву фольгу, утворюючи на фотоплівці систему дифракційних кілець. Розрахувати міжплощинну відстань, що відповідає відбиванню третього порядку від деякої системи кристалічних площин, якщо йому відповідає дифракційне кільце діаметром $D = 3,20$ см.

Відстань між фольгою та фотоплівкою $l = 10$ см. ($2,3 \text{ \AA}$)

3.2. Знайти довжину хвилі де-Бройля для електрона, що має кінетичну енергію 100 еВ. ($1,23 \text{ \AA}$)

3.3. Знайти довжину хвилі де-Бройля для пучка протонів, що прискорились різницею потенціалів 1В і 1МВ. ($0,29 \text{ \AA}$; $0,29 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$)

3.4. Паралельний пучок моноенергетичних електронів падає за нормаллю на вузьку прямокутну щілину завширшки $b = 0,1$ мм. Визначити швидкість електронів, якщо відомо, що на екрані, віддаленому від щілини на $l = 50$ см, ширина центрального дифракційного максимуму становить 80 мкм. ($9 \cdot 10^4$ м/с)

3.5. За допомогою максвеллівської функції розподілу за швидкостями $f(v) = Av^2 e^{-mv^2/2kT}$ обчислити найбільш імовірну де-бройлівську довжину хвилі молекул водню, що перебувають у термодинамічній рівновазі за температури 300 К. ($0,9 \text{ \AA}$)

3.6. Визначити де-бройлівську довжину хвилі молекул водню, що рухаються за температури 300 К з найбільш імовірною швидкістю. ($1,27 \text{ \AA}$)

3.7. За допомогою співвідношення невизначеностей оцінити мінімально можливу енергію електрона в атомі водню. ($-13,6$ еВ)

3.8 Середній час життя атома у збудженому стані становить $\Delta t \approx 10^{-8}$ с. Під час переходу атома у нормальний стан

випромінюється фотон, середня довжина хвилі якого дорівнює $\lambda = 500 \text{ нм}$. Оцінити ширину $\Delta\lambda$ і відносну ширину $\Delta\lambda/\lambda$ випромінювальної спектральної лінії, якщо її уширення не відбувається за рахунок інших процесів (таку ширину називають природною шириною спектральної лінії). ($\Delta\lambda \sim 10^{-5} \text{ нм}$, $\Delta\lambda/\lambda \sim 10^{-8}$)

3.9. Заряджена частинка, що прискорена різницею потенціалів 500 В, має довжину хвилі де-Бройля 1,282 пм. Вважаючи, що заряд частинки дорівнює заряду електрона, визначити її масу. ($1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$)

3.10. Яку додаткову енергію потрібно надати електрону, щоб довжина його хвилі зменшилась від 1,00 до 0,50 Å? (0,45 кеВ)

3.11. Визначити кінетичну енергію релятивістського електрона, за якої його де-бройлівська довжина хвилі дорівнюватиме комптонівській довжині. (0, 21 МеВ)

3.12. Знайти відношення невизначеностей швидкості електрона, якщо його координата встановлена з точністю 10^{-5} м , і частинки масою 10^{-12} кг , якщо її координата визначена з такою самою точністю. ($1,1 \cdot 10^{18}$)

3.13. Нейтрон з довжиною хвилі 1,8 пм, гальмуючись у сповільнювачі, розсіявся на частинці, що перебуває у стані спокою і мала масу в чотири рази більшу за масу нейтрона. Знайти де-бройлівські довжини хвиль обох частинок у системі їх центра мас. (2,25 пм)

3.14. Вільний електрон у момент $t = 0$ локалізовано в області $\Delta x_0 = 1 \text{ Å}$ (порядок розміру атома) Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей ширину області локалізації цього електрона через $t = 1 \text{ с}$ ($\Delta x \approx 10^3 \text{ км!}$)

3.15. Середня кінетична енергія електрона в незбудженому атомі водню 13,6 еВ. Виходячи зі співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальну похибку, з якою можна визначити координату електрона в атомі. (0,53 Å)

3.16. Обчислити мінімальну енергію протона, що рухається в потенціальній ямі завширшки 10 фм з абсолютно пружними стінками, та альфа-частинки в ямі завширшки 1 фм. (2 MeV; 50 MeV)

3.17. Частинка перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі завширшки l з абсолютно непроникними стінками $0 < x < l$. Знайти ймовірність перебування частинки в області $0 < x < l/3$. (0,195)

3.18. Частинка перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі завширшки l з абсолютно непроникними стінками $0 < x < l$. Знайти ймовірність перебування частинки в області $l/3 < x < 2l/3$. (0,61)

3.19. Використовуючи рівняння Шредінгера для стаціонарного стану показати, що енергія частинки, що рухається вільно, може набувати будь-яких значень енергій, тобто мати неперервний спектр енергій.

3.20. Електрон рухається в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Знайти ширину ями, якщо різниця між третім і другим збудженими станами дорівнює 0,44 eV. (20,6 Å)

3.21. Частинка масою m перебуває в основному стані в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Максимальне значення щільності ймовірності місцеперебування частинки в цьому стані дорівнює ρ_m . Знайти ширину ями та енергію частинки. ($l = 2/\rho_m$; $E = \pi^2 \hbar^2 \rho_m / 8m$)

3.22. Псі-функція основного стану гармонічного осцилятора має вигляд $\psi_0(x) = A \exp(-\beta x^2)$, де A і β сталі величини ($\beta > 0$). Використовуючи рівняння Шредінгера, знайти енергію основного стану. ($\hbar\omega/2$)

3.23. Псі-функція основного стану атома водню має вигляд $\psi_0(x) = A \exp(-r/a_1)$, де a_1 — борівський радіус (тобто радіус першої борівської орбіти). Знайти: а) сталу A ; б) щільність ймовірності перебування електрона на відстані r від ядра $\rho = dP/dr$; в) найбільш імовірну відстань $r_{\text{імов}}$ електрона від ядра; г) середню відстань $\langle r \rangle$ електрона від ядра. ($A = 1/\sqrt{\pi a_1^3}$; $\rho = (4r^2/a_1^2) \exp(-2r/a_1)$; $r_{\text{імов}} = a_1$; $\langle r \rangle = 3a_1/2$)

**Квантування атома водню. Спектри лужних металів,
спін електрона. Магнітний момент атома.
Правила Хунда. Закон Мозлі**

4.1. Основним для атома натрію є стан $3S$. Поправка Рідберга для S -термів дорівнює — 1,35. Визначити енергію іонізації атома натрію. (5,0 eV)

4.2. Основним для атома натрію є стан $3S$. Поправки Рідберга від'ємні і співвідносяться як $|\sigma_s| > |\sigma_p| > |\sigma_d|$. Рівень nP лежить нижче рівня $(n+1)S$, а рівень nD — нижче рівня $(n+1)P$. Перерахувати всі можливі послідовності переходів, коли атом натрію переходить зі збудженого стану $5S$ в основний стан. ($5S \rightarrow 4P \rightarrow 4S \rightarrow 3P \rightarrow 3S$; $5S \rightarrow 4P \rightarrow 3D \rightarrow 3P \rightarrow 3S$; $5S \rightarrow 4P \rightarrow 3S$; $5S \rightarrow 3P \rightarrow 3S$)

4.3. Потенціал іонізації атома літію 5,39 В, а перший потенціал збудження 1,85 В. Визначити поправки Рідберга σ_s і σ_p для літію. (−0,41; −0,04)

4.4. Кожний зі станів P і D має три компоненти. Які значення спінового квантового числа S можливі для цих станів? (для P стану $S = 1, 2, 3, 4$; для D стану $S = 1$)

4.5. Які з термів можливі у випадку електронних конфігурацій:
а) $2s^2$; б) $2p3s$; в) $3p^2$? (а) 1S_0 ; б) $^1P_1, ^3P_2, ^3P_1, ^3P_0$; в) $^1S_0, ^3P_2, ^3P_1, ^3P_0, ^1D_2$

4.6. Система складається із s - і d -електрона. Записати символ терма для стану з максимальним для цієї конфігурації повним механічним моментом. ($^4F_{9/2}$)

4.7. Яка величина повного механічного моменту M_J атома, що перебуває в стані, у якому магнітний момент дорівнює нулю, а орбітальне та спінове квантові числа мають значення $L = 2$ і $S = 3/2$? ($M_J = \hbar\sqrt{3/4}$)

4.8. Яке значення максимально можливого повного механічного моменту M_J атома літію, валентний електрон якого перебуває в стані з $n = 3$? Записати символ терма відповідного стану. ($M_J = (\hbar/2)\sqrt{35}$; $^2D_{5/2}$)

4.9. Визначити магнітний момент μ_1 електрона в атомі водню на першій борівській орбіті. Порівняти отриманий результат з магнетонам Бора. ($\mu_1 = \mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл)

4.10. Збуджений атом має електронну конфігурацію $1s^2 2s^2 2p 3d$ і перебуває при цьому в стані з максимально можливим повним механічним моментом. Знайти в магнетонах Бора повний магнітний момент атома в цьому стані. ($\mu = \mu_B (5\sqrt{5}/2)$)

4.11. Атом перебуває у стані, мультиплетність якого дорівнює трьом, а повний механічний момент $M_J = \hbar\sqrt{20}$. Яким може бути відповідне квантове число L ? ($L = 3, 4, 5$)

4.12. Використовуючи правила Хунда, знайти основний терм атома, незаповнена оболонка якого вміщує: а) три p -електрони; б) чотири p -електрони (а) $^4S_{3/2}$; б) 3P_2)

4.13. Визначити довжину хвилі L_α спектральної лінії рентгенівських променів, випромінюваних рентгенівською трубкою з вольфрамовим антикатодом. Для L -серії стала екранування $\sigma = 7,5$. ($1,48 \text{ \AA}$).

4.14. Знайти за допомогою правил Хунда повний механічний момент атома в основному стані, якщо його незаповнена підоболонка містить: а) три d -електрони; сім d -електронів. ($^4F_{3/2}$, $M_J = \hbar\sqrt{15}/2$; $^4F_{9/2}$, $M_J = 3\hbar\sqrt{11}/2$)

4.15. Під час переходу електрона в атомі з L -шару на K -шар випромінюються рентгенівські промені з довжиною хвилі $0,788 \text{ \AA}$. З якого матеріалу виготовлено антикатод? Для K -серії стала екранування $\sigma = 1$. ($Z = 40$ цирконій)

4.16. Яку мінімальну напругу потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб отримати всі лінії K -серії, якщо антикатод зроблений зі срібла? Довжина хвилі K -краю смуги поглинання становить $\lambda_K = 48,4 \text{ пм}$. (25,6 кВ)

4.17. Знайти напругу на рентгенівській трубці з нікелевим антикатодом, якщо різниця довжин хвиль між K_α -лінією та короткохвильовою межею суцільного рентгенівського спектра становить 84 пм . (15 кВ)

4.18. Визначити довжину хвилі та енергію фотона, що належать K_{α} -лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання міді. Для K -серії стала екранування $\sigma = 1$. ($1,54 \text{ \AA}$; 8 кеВ)

Ефект Зеємана. ЕПР. Лазери

5.1. На скільки компонент розщепляться в слабкому магнітному полі такі терми: а) 1S ; б) 1P ; в) 1D ; г) $^2D_{5/2}$? (а) не розщепиться; б) 3; в) 5; г) 6)

5.2. На скільки компонентів розщепиться пучок атомів у досліді, Штерна і Герлаха, якщо атоми перебувають в станах а) 1S_0 ; б) $^4D_{1/2}$? (розщеплення не буде в обох випадках)

5.3. Розрахувати повну величину розщеплення $\Delta\omega$ спектральної лінії $^3D_3 \rightarrow ^3P_2$ у слабкому магнітному полі $B = 3,4 \text{ кГс}$. ($1,0 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$)

5.4. Атом перебуває у слабкому магнітному полі з індукцією $B = 2,5 \text{ кГс}$. Знайти повну величину розщеплення в електрон-вольтах терма 3F_4 . (145 мкеВ)

5.5. Атом перебуває у магнітному полі з індукцією 1 Тл . Знайти повне розщеплення ΔE (в електрон-вольтах) термів 1D , $^2D_{5/2}$. ($2,32 \cdot 10^{-4} \text{ еВ}$; $3,48 \cdot 10^{-4} \text{ еВ}$)

5.6. Знайти величину нормального (лоренцового) зміщення $\Delta\omega_0$ компонент спектральної лінії для простого ефекту Зеємана, якщо $B = 1 \text{ Тл}$. ($0,88 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$)

5.7. Визначити спектральний символ синглетного терма атома, якщо повна ширина розщеплення цього терма в слабкому магнітному полі з індукцією 3 кГс становить 104 мкеВ . (1F_3)

5.8. Відомо, що спектральна лінія 612 нм атома зумовлена переходом між синглетними термами. Розрахувати інтервал $\Delta\lambda$ між крайніми компонентами цієї лінії в магнітному полі з індукцією 10 кГс . ($\Delta\lambda = \lambda^2 \mu_B B / \pi c \hbar = 35 \text{ пм}$)

5.9. Знайти мінімальну роздільну здатність $\lambda/\delta\lambda$ спектрального приладу, за допомогою якого можна зафіксувати зеєманівську

структуру спектральної лінії $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ (${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$) натрію в магнітному полі $B = 2 \text{ кГс}$. ($1,09 \cdot 10^5$)

5.10. Який ефект Зеемана (простий чи складний) виявляють у слабкому магнітному полі спектральні лінії, що зумовлені переходами: а) ${}^3D_1 \rightarrow {}^3P_0$; б) ${}^5I_5 \rightarrow {}^5H_4$? (простий в обох випадках). Відповідь обґрунтувати.

5.11. Визначити (у магнітонах Бора) магнітний момент атомів нікелю у стані 3F , якщо за одночасної дії сталого магнітного поля з індукцією $B = 2 \text{ кГс}$ і перпендикулярно до нього змінного поля B_v з частотою $\nu = 3,5 \text{ ГГц}$ спостерігається резонансне поглинання енергії. ($\mu = 5,6 \cdot \mu_B$)



Навчальний елемент 8

ТАБЛИЦІ ДОВІДОК

Присавки до одиниць вимірювання

Найменування	Відношення до основної одиниці	Скорочене позначення	
		українське	міжнародне
атто	10^{-18}	а	a
фемто	10^{-15}	Ф	F
піко	10^{-12}	п	p
нано	10^{-9}	н	n
мікро	10^{-6}	мк	μ
мілі	10^{-3}	м	m
санті	10^{-2}	с	c
деци	10^{-1}	д	d
дека	10	да	da
гекто	10^2	г	h
кіло	10^3	к	k
мега	10^6	М	M
гіга	10^9	Г	G
тера	10^{12}	Т	T

Робота виходу електрона з металів

Метал	A , eВ	Метал	A , eВ	Метал	A , eВ
Алюміній	3,74	Калій	2,15	Нікель	4,84
Барій	2,29	Кобальт	4,25	Платина	5,29
Вісмут	4,62	Літій	2,39	Срібло	4,28
Вольфрам	4,50	Мідь	4,47	Титан	3,92
Залізо	4,36	Молибден	4,27	Цезій	1,89
Золото	4,58	Натрій	2,27	Цинк	3,74

Співвідношення між одиницями вимірювання деяких величин

1 Н = 10^5 дин 1 Дж = 10^7 ерг 1 Вт = 10^7 ерг/с 1 Кл = $3 \cdot 10^9$ СГС 1 А = $3 \cdot 10^9$ СГС 1 В = 1/300 СГС 1 В/м = $1/(3 \cdot 10^4)$ СГС 1 Ом = $1/(9 \cdot 10^{11})$ см 1 Ф = $9 \cdot 10^{11}$ см	1 Тл = 10^4 Гс 1 Вб = 10^8 Мкс 1 А/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ е 1 Гн = 10^9 см 1 рік = $3,11 \cdot 10^7$ с 1 Å = 10^{-8} см 1 атм = 101,3 кПа = 760 тор 1 а.о.м. = $1,660 \cdot 10^{-27}$ кг = 931,50 МеВ 1 eВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
---	--

Універсальні фізичні константи

Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с
Гравітаційна стала	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг·с ²)
Число Авогадро	$N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Універсальна газова стала	$R = 8,314$ Дж/(К·моль)
Стала Больцмана	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К = 0,8617 еВ/К
Елементарний заряд	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл = 4,803·10 ⁻¹⁰ СГС
Маса електрона	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг = 5,486·10 ⁻⁴ а.о.м. = = 0,511 МеВ
Питомий заряд електрона	$e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг = 5,27·10 ¹⁷ СГС/Г
Маса протона	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг = 1,007276 а.о.м. = = 938,28 МеВ
Питомий заряд протона	$e/m_p = 0,959 \cdot 10^8$ Кл/кг = 2,87·10 ¹⁴ СГС/Г
Стала Стефана–Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴) = 5,67·10 ⁻⁵ ерг/(с·см ² ·К ⁴)
Стала Віна	$b = 0,290$ см·К = 2,90·10 ⁻³ м·К
Стала Планка	$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = 4,14·10 ⁻¹⁵ еВ·с $\hbar = h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = = 0,6582·10 ⁻¹⁵ еВ·с
Стала Рідберга	$R_\omega = 2,067 \cdot 10^{16}$ с ⁻¹ $R_\nu = R_\omega/2\pi = 3,28 \cdot 10^{15}$ с ⁻¹ $R_{1/\lambda} = R_\omega/2\pi c = 1,097 \cdot 10^7$ м ⁻¹ $E = 13,56$ еВ
Енергія зв'язку електрона в атомі водню	$\lambda_C = 2,426 \cdot 10^{-10}$ см
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\mu_B = 0,9274 \cdot 10^{-20}$ ерг/Гс = = 0,9274·10 ⁻²³ Дж/Тл = = 0,5788·10 ⁻⁴ еВ/Гс
Магнетон Бора	$\mu_\alpha = 0,051 \cdot 10^{-24}$ ерг/Гс = = 5,051·10 ⁻²⁷ Дж/Тл = 3,152·10 ⁻⁸ еВ/Гс
Ядерний магнетон	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Електрична стала	$1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = 1,257·10 ⁻⁶ Гн/м

PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS D.I. MENDELEEV																																				
VIII																																				
VII																																				
VI																																				
V																																				
IV																																				
III																																				
II																																				
I																																				
PERIOD	I			II			III			IV			V			VI			VII			VIII														
1	H 1,0079 Гідроген Водень	Li 6,941	Be 9,0122	B 10,811	C 12,011 Карбон Вуглець	N 14,007 Азот	O 15,999 Оксиген Кисень	F 18,998 Флуор Фтор	Ne 20,179	He 4,0026 Гелій				Co 58,93 Кобальт	Ni 58,69 Нікель	Cu 63,546 Купрум Мідь	Zn 65,39 Цинк	Ga 69,723 Галій	Ge 72,59 Германій	As 74,922 Арсен	Se 78,96 Селен	Br 79,904 Бром	Kr 83,80 Криптон													
2	Li 6,941	Be 9,0122	B 10,811	C 12,011 Карбон Вуглець	N 14,007 Азот	O 15,999 Оксиген Кисень	F 18,998 Флуор Фтор	Ne 20,179	He 4,0026 Гелій				Co 58,93 Кобальт	Ni 58,69 Нікель	Cu 63,546 Купрум Мідь	Zn 65,39 Цинк	Ga 69,723 Галій	Ge 72,59 Германій	As 74,922 Арсен	Se 78,96 Селен	Br 79,904 Бром	Kr 83,80 Криптон														
3	Na 22,990	Mg 24,305	Al 26,982	Si 28,086	P 30,974	S 32,066	Cl 35,453	Ar 39,948	He 4,0026 Гелій				Co 58,93 Кобальт	Ni 58,69 Нікель	Cu 63,546 Купрум Мідь	Zn 65,39 Цинк	Ga 69,723 Галій	Ge 72,59 Германій	As 74,922 Арсен	Se 78,96 Селен	Br 79,904 Бром	Kr 83,80 Криптон														
4	K 39,098	Ca 40,078	Sc 44,956	Ti 47,88	V 50,942	Cr 51,996	Mn 54,938	Fe 55,847	Co 58,93 Кобальт	Ni 58,69 Нікель	Cu 63,546 Купрум Мідь	Zn 65,39 Цинк	Ga 69,723 Галій	Ge 72,59 Германій	As 74,922 Арсен	Se 78,96 Селен	Br 79,904 Бром	Kr 83,80 Криптон	Rb 85,468	Sr 87,62	Y 88,906	Zr 91,224	Nb 92,906	Mo 95,94	Tc 98,906	Ru 101,07	Rh 102,91	Pd 106,42								
5	Rb 85,468	Sr 87,62	Y 88,906	Zr 91,224	Nb 92,906	Mo 95,94	Tc 98,906	Ru 101,07	Rh 102,91	Pd 106,42	Ag 107,87 Аргентум Срібло	Cd 112,41 Кадмій	In 114,82 Індій	Sn 118,71 Станум Олово, цинк	Pb 207,2 Свинць, свинець	Tl 204,38 Талій	Po 209 Полоній	At 210 Астат	Rn 222 Радон	Fr 223 Францій	Ra 226,025 Радій	Ac 227 Актиній	Th 232,0377 Торій	Pa 231,03688 Протактіній	U 238,02891 Уран	Np 237,048173 Нептуній	Pu 244,06422 Плутоній	Am 243,061381 Америцій	Cm 247,070353 Кюріцій	Bk 247,071327 Берклій	Cf 251,083288 Каліфорній	Es 252,083276 Ейнштейній	Fm 257,1037 Фермій	Md 288 Металевій	No 289 Нобелій	Lr 260,10538 Лоренцій
6	Cs 132,91 Цезій	Ba 137,33 Барій	*La 138,91 Лантан	Hf 178,49 Гафній	Ta 180,95 Тантал	W 183,85 Вольфрам	Re 186,21 Реній	Os 190,2 Осмій	Ir 192,22 Ірідій	Pt 195,08 Платина	Fr 223 Францій	Ra 226,025 Радій	Ac 227 Актиній	Th 232,0377 Торій	Pa 231,03688 Протактіній	U 238,02891 Уран	Np 237,048173 Нептуній	Pu 244,06422 Плутоній	Am 243,061381 Америцій	Cm 247,070353 Кюріцій	Bk 247,071327 Берклій	Cf 251,083288 Каліфорній	Es 252,083276 Ейнштейній	Fm 257,1037 Фермій	Md 288 Металевій	No 289 Нобелій	Lr 260,10538 Лоренцій									
7	Fr 223 Францій	Ra 226,025 Радій	Ac 227 Актиній	Th 232,0377 Торій	Pa 231,03688 Протактіній	U 238,02891 Уран	Np 237,048173 Нептуній	Pu 244,06422 Плутоній	Am 243,061381 Америцій	Cm 247,070353 Кюріцій	Bk 247,071327 Берклій	Cf 251,083288 Каліфорній	Es 252,083276 Ейнштейній	Fm 257,1037 Фермій	Md 288 Металевій	No 289 Нобелій	Lr 260,10538 Лоренцій																			
8	Ce 140,12 Церій	Pr 140,91 Прометій	Nd 144,24 Неодим	Pm 144,91 Прометій	Sm 150,36 Самарій	Eu 151,96 Європій	Gd 157,25 Гадоліній	Tb 158,93 Тербій	Dy 162,50 Диспроцій	Ho 164,93 Гольмій	Er 167,26 Ербій	Tm 168,93 Тульцій	Yb 173,04 Йттербий	Lu 174,967 Лютецій																						
9	Th 232,0377 Торій	Pa 231,03688 Протактіній	U 238,02891 Уран	Np 237,048173 Нептуній	Pu 244,06422 Плутоній	Am 243,061381 Америцій	Cm 247,070353 Кюріцій	Bk 247,071327 Берклій	Cf 251,083288 Каліфорній	Es 252,083276 Ейнштейній	Fm 257,1037 Фермій	Md 288 Металевій	No 289 Нобелій	Lr 260,10538 Лоренцій																						



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Взоров Н. Н.* Сборник задач по общей физике / Н. Н. Взоров, О. И. Замша, И. Е. Иродов, И. В. Савельев. — М. : Наука, 1968. — 207 с.

2. *Волькенштейн В. С.* Сборник задач по общему курсу физики / В. С. Волькенштейн. — М. : Наука, 1979. — 352 с.

3. *Горбачук І. Т.* Курс фізики / І. Т. Горбачук, І. М. Кучерук. — К. : Техніка, 2006. — Т. 3 — 520 с.

4. *Иродов И. Е.* Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. — М. : Наука, 1979. — 367 с.

5. *Иродов И. Е.* Квантовая физика. Основные законы: учеб. пособие для вузов / И. Е. Иродов. — М. : Бинум, 2004. — 256 с.

6. *Ландсберг Г. С.* Оптика / Г. С. Ландсберг. — М. : Физматлит, 2003. — 848 с.

7. *Матвеев А. Н.* Атомная физика / А. Н. Матвеев. — М. : Высш. шк. 1989. — 440 с.

8. *Радушкевич Л. В.* Курс статистической физики / Л. В. Радушкевич. — М. : Учпедгиз, 1960. — 347 с.

9. *Савельев И. В.* Курс общей физики / И. В. Савельев. — М. : Наука, 1982. — Т. 3. — 432 с.

10. *Савельев И. В.* Сборник вопросов и задач по общей физике учебное пособие / И. В. Савельев. — М. : Наука, 1982. — 272 с.

11. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики / Д. В. Сивухин. — М. : Наука, 1979. — 520 с.

12. *Фирганг Е. В.* Руководство к решению задач по курсу общей физики: [учеб. пособие для втузов] / Е. В. Фирганг. — М. : Высш. шк., 1977. — 352 с.

13. *Яворський Б. М.* Курс фізики / Б. М. Яворський, А. А. Детлаф. — К. : Вища шк., 1970. — Т. 3. — 356 с.

14. *Шпольский Э. В.* Атомная физика / Э. В. Шпольский. — М. : Наука, 1974. — Т. 1. — 575 с.

15. *Лабораторна установка для вивчення абсолютно чорного тіла ФПК-11 / паспорт ФПК 11.00.00.00.00 ПС.* — Рівне: НВП «Учбова техніка», 2006. — 13 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
<i>Навчальний елемент 1</i>	
КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ	6
1.1. Теплове випромінювання	6
1.1.1. Закон Кірхгофа	9
1.1.2. Випромінювання абсолютно чорного тіла.....	11
1.1.3. Стационарне поле в порожнині як сукупність стоячих хвиль.....	14
1.1.4. Формула Релея–Джинса	18
1.1.5. Формула Віна.....	19
1.1.6. Формула Планка.....	20
1.1.7. Закони теплового випромінювання абсолютно чорного тіла	23
1.2. Фотоефект. Формула Ейнштейна	26
1.3. Гальмівне рентгенівське випромінювання	33
1.4. Ефект Комптона. Корпускулярне розсіювання світла	37
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	45
<i>Задачі</i>	46
<i>Приклади розв’язування задач</i>	46
<i>Аудиторні задачі</i>	52
<i>Навчальний елемент 2</i>	
АТОМ РЕЗЕРФОРДА–БОРА	54
2.1. Ядерна модель атома.....	54
2.2. Атомні спектри водню	60
2.3. Постулати Бора. Досліди Франка і Герца	63
2.4. Борівська модель атома водню та воднеподібних іонів.....	67
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	75

Задачі	75
Приклади розв'язування задач	75
Аудиторні задачі	78

Навчальний елемент 3

ЕЛЕМЕНТИ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ	80
3.1. Хвильові властивості речовини	80
3.1.1. Гіпотеза де-Бройля	80
3.1.2. Експериментальне підтвердження гіпотези де-Бройля	83
3.1.3. Принцип невизначеності	86
3.2. Рівняння Шредінгера. Зміст хвильової функції	92
3.3. Найпростіші випадки руху мікрочастинок	99
3.3.1. Частинка в потенціальній ямі. Квантування енергії	99
3.3.2. Проходження частинки крізь прямокутний потенціальний бар'єр скінченної ширини	104
3.3.3. Квантовий гармонічний осцилятор	109
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	111
Задачі	113
Приклади розв'язування задач	113
Аудиторні задачі	116

Навчальний елемент 4

КВАНТУВАННЯ АТОМІВ	117
4.1. Квантування воднеподібного атома. Квантування енергії	117
4.2. Квантування моменту імпульсу та магнітного моменту електрона	121
4.3. Спектральні особливості лужних металів	127
4.4. Тонка структура спектральних ліній. Спін електрона	130
4.5. Повний механічний і магнітний моменти електрона	134
4.6. Механічний момент багатоелектронного атома	139

4.7. Принцип Паулі. Розподіл електронів по енергетичних рівнях (оболонках) в атомі	142
4.8. Багаточастинна хвильова функція. Невизначеність тотожних частинок. Бозони і ферміони.....	144
4.9. Періодична система елементів Менделєєва.....	147
4.10. Характеристичне рентгенівське випромінювання	152
4.11. Закон Мозлі	157
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	160
Задачі	162
Приклади розв'язування задач	162
Аудиторні задачі.....	165

Навчальний елемент 5

АТОМИ В МАГНІТНИХ ПОЛЯХ. ЛАЗЕРИ	167
5.1. Ефект Зесмана.....	167
5.2. Електронний парамагнітний резонанс	173
5.3. Спонтанне та індуковане випромінювання.....	176
5.4. Лазери.....	179
<i>Запитання та завдання для самоконтролю</i>	183
Задачі	184
Приклади розв'язування задач	184
Аудиторні задачі.....	185

Навчальний елемент 6

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ	187
---------------------------------	-----

Навчальний елемент 7

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ	213
---	-----

Навчальний елемент 8

ТАБЛИЦІ ДОВІДОК	231
------------------------------	-----

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	235
--------------------------------	-----

Навчальне видання

ПОЛІЩУК Аркадій Павлович
БОРДЮГ Ганна Борисівна
ГРІДЯКІНА Олександра Валеріївна
КРУЧИНІН Сергій Павлович
СЛІПУХІНА Ірина Андріївна

ФІЗИКА
Модуль 6
ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ
ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Редактор *Р. М. Шульженко*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Художник *О. О. Зайцева*
Комп'ютерна верстка *Л. Т. Колодіної*

Підп. до друку 10.07.2015. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 13,95. Обл.-вид. арк. 15,0.
Тираж 100 пр. Замовлення № 124-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002